

Introducere în Teoria Categoriilor și Algebre Universale

Teorie și exerciții

Violeta Leoreanu-Fotea

Prefață

Această carte se adresează studenților Facultății de Matematică, dar totodată vine în întâmpinarea tuturor celor care își doresc o introducere și o familiarizare cu Teoria categoriilor și Algebrelor universale.

Categoriile, prezentate în prima parte a cărții, sunt necesare în prezent în abordarea mai multor sectoare ale matematicii și în informatica teoretică și fizica matematică, constituind o noțiune unificatoare. Intuitiv, o categorie constă din anumite structuri matematice și morfisme între acestea, care conservă operațiile.

Partea a doua a cursului este dedicată studiului algebrelor universale. O algebră universală este un ansamblu format dintr-o mulțime de bază și un set de operații, care pot avea diverse tipuri, de exemplu pot fi operații nulare, unare, binare, ternare etc.

Partea dedicată categoriilor reprezintă o scurtă introducere în această teorie, necesară înțelegerii limbajului categorial, analizându-se concepte de bază, precum produse și coproduse/sume directe, produse și sume fibrante, egalizatori și coegalizatori, nuclee și conuclee, apoi noțiuni mai generale de limită și colimită într-o categorie, cât și legăturile dintre acestea și se încheie cu prezentarea și exemplificarea noțiunii de functori adjuncți. Totodată se menționează

diverse tipuri de categorii, care fac obiectul unor studii aprofundate în domeniu.

În partea a doua a cursului se prezintă noțiuni introductive cheie din teoria algebrelor universale. Fundamentele acestui domeniu se găsesc în cărțile :

- Grätzer G. , *Universal algebra*, Second edition. Springer-Verlag, New York , 1979
- Cohn, P.M., *Universal algebra*, Mathematics and Its Applications, Volume 6, 1981

Prezentarea noțiunilor de algebră universală din cartea lui P.M. Cohn necesită cunoașterea unui limbaj categorial de bază. Ulterior acest domeniu al algebrei s-a bucurat de o dezvoltare impresionantă, în special în ultimii douăzeci de ani.

Noțiunile prezentate în această parte sunt pe de o parte din teoria generală a algebrelor universale și aici ne referim la prezentarea și exemplificarea noțiunii de algebră universală, de morfism, izomorfism, congruență în legătură cu noțiunea de algebră factor, studiul laticilor de subalgebre și respectiv de congruențe, în conexiune cu noțiunea de sistem și operator de închidere. Pe de altă parte, sunt studiate diverse clase de latici. Noțiunea de latice este un exemplu important de algebră universală, ce structurează algebric mulțimea subalgebrelor unei algebre universale și are o largă aplicabilitate în informatică și inginerie software. De aceea, ne-am propus să analizăm clase importante de latici: modulare, distributive, Boole, complete, infinit distributive.

În finalul prezentării algebrelor universale, ne-am oprit asupra algebrelor libere și, ca o punte de legătură între cele două părți

ale cărții, am menționat functorul universal, ce asociază fiecărei mulțimi nevide algebra liberă corespunzătoare.

Prezentarea diverselor noțiuni din această carte este însoțită de exemple și de exerciții, care contribuie la o mai bună înțelegere.

Ultimul capitol al cărții prezintă note istorice, scurte bibliografii ale celor ce au contribuit esențial la dezvoltarea acestor două domenii.

Cuprins

Capitolul 1

Categorii. Functori. Morfisme functoriale

1.1 Noțiunea de categorie

Pentru definirea unei **categorii** \mathcal{C} avem nevoie de următoarele **tipuri de elemente**:

- i) o *clasă* de obiecte $\text{Ob } \mathcal{C}$, ale cărei elemente sunt numite *obiecte* ale lui \mathcal{C} .

Obiectele categoriei \mathcal{C} se notează A, B, C, \dots și scriem

$$A, B, C, \dots \in \text{Ob } \mathcal{C};$$

- ii) $\forall A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$, e dată **mulțimea** *morfismelor* de sursă A și *cosursă* B în categoria \mathcal{C} , notată cu $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$. Vom nota $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ sau $A \xrightarrow{f} B$;

iii) $\forall A, B, C \in \text{Ob } \mathcal{C}$, este dată funcția

$$\mu_{A,B,C} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

numită **compunerea** morfismelor; dacă

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C,$$

atunci $\mu_{A,B,C}(f, g) \stackrel{\text{not}}{=} g \circ f$ este compusul morfismelor g și f .

Definiția 1 Aceste trei tipuri de elemente formează o **categorie**, notată cu \mathcal{C} , dacă sunt îndeplinite condițiile:

$$c_1) \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \cap \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A', B') \neq \emptyset \Rightarrow A = A', B = B'.$$

$$c_2) A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D, (hg)f = h(gf), \forall A, B, C, D, \forall f, g, h$$

(**asociativitatea** compunerii morfismelor).

$$c_3) \forall A \in \text{Ob } \mathcal{C}, \exists 1_A \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A) \text{ astfel încât } \forall B, C \in \text{Ob } \mathcal{C},$$

$$\forall f, g$$

$$B \xrightarrow{f} A \xrightarrow{g} C$$

să avem $1_A \circ f = f$ și $g \circ 1_A = g$ (**existența** morfismelor identitate).

Observația 1 1_A este unic.

Presupunem că $\exists 1_A, e \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, A)$ astfel încât

$$\left. \begin{array}{l} 1_A \circ f = e \circ f = f \\ g \circ 1_A = g \circ e = g \end{array} \right\} \text{Obținem } 1_A = e.$$

(iau $f = 1_A, g = e$, ca la unicitatea elementului neutru într-un grup)

Observația 2 *Condiția c_1) nu este esențială.*

Într-adevăr, putem defini categoria \mathcal{C}' cu $\text{Ob } \mathcal{C}' = \text{Ob } \mathcal{C}$,

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(A, B) = \{(A, B)\} \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B).$$

$$\text{Atunci } \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(A, B) \cap \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(A', B') \neq \emptyset \iff \begin{cases} A = A' \\ B = B' \end{cases},$$

adică c_1) are loc în \mathcal{C}' .

Definiția 2 *O categorie \mathcal{C} se numește **mică** dacă $\text{Ob } \mathcal{C}$ este o mulțime.*

Exemple de categorii

Exemplul 1 *Set: categoria mulțimilor*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ob Set : mulțimi} \\ \text{Hom}_{\text{Set}}(A, B) \text{ este mulțimea funcțiilor de la } A \text{ la } B \\ \text{compunerea morfismelor este compunerea funcțiilor.} \end{array} \right.$$

Exemplul 2 *Gr: categoria grupurilor*

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{Ob Gr : grupuri} \\ \cdot \text{morfismele: morfisme de grupuri} \\ \cdot \text{compunerea morfismelor este compunerea} \\ \text{morfismelor de grupuri.} \end{array} \right.$$

Exemplul 3 *Ab: categoria grupurilor abeliene.*

Exemplul 4 $R - \text{mod}$: categoria R -modulelor, unde R este un inel unitar.

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{Ob } R - \text{mod} : R - \text{module stângi} \\ \cdot \text{morfismele: morfisme de } R - \text{module} \\ \cdot \text{compunerea morfismelor este compunerea morfismelor de} \\ R - \text{module.} \end{array} \right.$$

Exemplul 5 Fie (G, \cdot, e) un grup. Definim \mathcal{C}_G astfel:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ob } \mathcal{C}_G = \{*\} \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}_G}(*, *) = G \text{ (aici morfismele nu sunt funcții)} \\ \mu_{*,*,*} : G \times G \rightarrow G \\ (a, b) \rightsquigarrow ab, \text{ compunerea lui } a \text{ cu } b \text{ din } G; 1_* = e. \end{array} \right.$$

Similar, plecând de la un monoid (M, \cdot) obținem o categorie \mathcal{C}_M .

Exemplul 6 Fie (X, \leq) o **mulțime preordonată**. Definim \mathcal{C} astfel:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ob } \mathcal{C} = X \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) = \begin{cases} (x, y) & x \leq y \\ \emptyset & \text{altfel} \end{cases} \\ \text{(deci are un element sau niciunul)} \\ \mu_{x,y,z} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, y) \times \text{Hom}_{\mathcal{C}}(y, z) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z), \text{ unde} \end{array} \right.$$

dacă $x \not\leq y$ sau $y \not\leq z$, atunci $\mu_{x,y,z}$ e incluziunea $\emptyset \subset \text{Hom}_{\mathcal{C}}(x, z)$.

dacă $x \leq y$ și $y \leq z$, atunci $\mu_{x,y,z}((x, y), (y, z)) = (x, z)$.

Exemplul 7 *Top* : categoria spațiilor topologice

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ob Top} : \text{spații topologice} \\ \text{morfismele sunt funcții continue, notate astfel } (X, \tau) \xrightarrow{f} (X', \tau') \end{array} \right.$$

Exemplul 8 *Set.* : categoria mulțimilor punctate.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ob Set.} : \text{Obiectele au forma } (A, a), \text{ unde } A \text{ este o mulțime, } a \in A \\ \text{morfismele sunt notate astfel } : (A, a) \xrightarrow{f} (B, b), \text{ unde } \begin{cases} f : A \rightarrow B \\ f(a) = b. \end{cases} \end{array} \right.$$

Exemplul 9 *Pos* : categoria mulțimilor parțial ordonate. Morfismele sunt funcții crescătoare.

Exemplul 10 *Lat* : categoria laticilor. Morfismele sunt morfismele laticiale.

Exemplul 11 *SGr* : categoria semigrupurilor. Morfismele sunt morfisme de semigrupuri.

Exemplul 12 *Mon* : categoria monoizilor. Morfismele sunt morfisme de monoizi.

Exemplul 13 *Rng₁* : categoria inelelor cu unitate. Morfismele sunt morfisme de inele unitare.

Exemplul 14 *Field* : categoria corpurilor comutative. Morfismele sunt morfisme nenule de corpuri.

Exemplul 15 *R – Alg* : categoria *R*–algebrelor peste un inel comutativ *R*.

Exemplul 16 $MLinSp$: categoria spațiilor liniare normate. Morfismele sunt transformări liniare mărginite (continue).

Exemplul 17 $TopBun$: categoria spațiilor topologice fibrante. Obiectele sunt triplete (X, p, B) , unde X, B sunt spații topologice și $p : X \rightarrow B$ funcție continuă.

Exemplul 18 Categoria R -matricilor, unde R este un inel comutativ. Obiectele sunt numere naturale nenule. $Hom(m, n)$ este mulțimea $n \times m$ matricilor cu coeficienți în \mathbb{R} . Compunerea este înmulțirea matricilor.

Exemplul 19 Categorii cât: Prezentăm următorul exemplu:

Fie $\alpha, \beta : A \rightarrow B$ morfisme în categoria Top și $I = [0, 1]$.

Definim pe $Hom(A, B)$ o relație de echivalență R_{AB} astfel:

$$\alpha R_{AB} \beta$$

dacă există o funcție continuă

$$f : A \times I \rightarrow B$$

astfel încât

$$f(a, 0) = \alpha(a) \text{ și } f(a, 1) = \beta(a)$$

pentru orice $a \in A$.

R_{AB} este o echivalență.

Într-adevăr, R_{AB} este reflexivă (pentru orice $i \in I$, definim $f(a, i) = \alpha(a)$), R_{AB} este simetrică (definim $g(a, i) = f(a, 1 - i)$)

și R_{AB} este tranzitivă. Pentru f și g date, definim

$$h(a, i) = \begin{cases} f(a, 2i) & \text{dacă } 0 \leq i \leq \frac{1}{2} \\ g(a, 2i - 1) & \text{dacă } \frac{1}{2} \leq i \leq 1. \end{cases}$$

Echivalența R_{AB} se numește **omotopie** și este o congruență, adică este compatibilă cu compunerea din Top :

Fie $u : A \rightarrow B$ și $\alpha, \beta : B \rightarrow C$, astfel încât $\alpha R_{AB} \beta$. Arătăm că $(\alpha u) R_{AB} (\beta u)$.

Din $\alpha R_{AB} \beta$ rezultă că există omotopia $f : B \times I \rightarrow C$ (continuă) astfel ca $f(b, 0) = \alpha(b)$ și $f(b, 1) = \beta(b)$, pentru orice $b \in B$.

Definim $f_1 : A \times I \rightarrow B \times I$ prin $f_1(a, i) = (u(a), i)$ pentru orice $a \in A$.

Atunci $f f_1$ este continuă și $f f_1(a, 0) = f(u(a), 0) = \alpha(b)$ și $f f_1(a, 1) = f(u(a), 1) = \beta(b)$, adică $(\alpha u) R_{AB} (\beta u)$.

Categoria cât Top/R se notează și $hTop$ și se numește categoria omotopică a spațiilor topologice.

Subcategorii. Subcategorii pline

Fie \mathcal{C} o categorie.

Definiția 3 Categoria \mathcal{C}' se numește **subcategorie** a lui \mathcal{C} dacă:

$$\left[\begin{array}{l} \cdot \text{Ob } \mathcal{C}' \subseteq \text{Ob } \mathcal{C} \\ \cdot \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) \subseteq \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y), \forall X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}' \\ \cdot \text{compunerea în } \mathcal{C}' \text{ e indusă de compunerea în } \mathcal{C}. \end{array} \right.$$

Mai mult, $\forall X \in \text{Ob } \mathcal{C}'$, $1_X \in \text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, X)$.

Dacă, în plus, $\forall X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}'$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}'}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, atunci \mathcal{C}' este o *categorie plină* a lui \mathcal{C} .

Exemplul 20 $\overline{\text{Ab}}$ este subcategorie plină a lui Ab .

Exemplul 21 Ab este subcategorie plină a lui Gr .

Exemplul 22 Gr este subcategorie plină a lui Set .

1.2 Obiecte inițiale. Obiecte finale

Definiția 4 Fie \mathcal{C} o categorie și $A \xrightarrow{f} B$. f se numește **izomorfism** în \mathcal{C} dacă $\exists B \xrightarrow{g} A$, astfel încât $g \circ f = 1_A$ și $f \circ g = 1_B$.

Spunem atunci că A și B sunt **echivalente** și notăm $A \sim B$.

Definiția 5 $I \in \text{Ob } \mathcal{C}$ se numește **obiect inițial** dacă

$$|\text{Hom}_{\mathcal{C}}(I, X)| = 1, \forall X \in \text{Ob } \mathcal{C}.$$

Definiția 6 $F \in \text{Ob } \mathcal{C}$ se numește **obiect final** dacă

$$|\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F)| = 1, \forall X \in \text{Ob } \mathcal{C}.$$

Definiția 7 Un obiect se numește **obiect zero** dacă este simultan obiect inițial și final.

Observația 3 În categorii cu obiecte zero, $\forall A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ este nevidă, deoarece pentru un obiect zero Z , există un morfism de la A la Z , un morfism de la Z la B , deci există și compunerea acestora.

Exemple

Exemplul 23 În Set , $I = \emptyset$, F este orice mulțime singleton $\{\alpha\}$, iar obiectele echivalente sunt mulțimile cardinal echivalente.

Exemplul 24 În Gr , $I = F$ orice grup cu un element.

Dacă G conține măcar două elemente, atunci există cel puțin două morfisme: 1_G și morfismul nul. Similar în Ab și $R\text{-mod}$.

Exemplul 25 În \mathcal{C}_G , $\exists I = F \iff |G| = 1$. Orice morfism este izomorfism în \mathcal{C}_G . Reciproc, dacă o categorie \mathcal{C} cu un obiect are toate morfismele izomorfisme, atunci $\mathcal{C} = \mathcal{C}_G$.

Exemplul 26 În categoria asociată unei mulțimi preordonată (X, \leq) , două elemente x, y sunt **echivalente** dacă și numai dacă $x \leq y$ și $y \leq x$. Avem $x = I$ dacă $x = \min X$, dacă există. Similar, $x = F$ dacă $x = \max X$, dacă există.

Exemplul 27 Categoria Rng_1 are obiect inițial, dar nu și zero.

Pentru orice inel unitar R există un unic morfism unitar $f : \mathbb{Z} \rightarrow R$ cu

$$f(n) = nf(1).$$

Deci inelul \mathbb{Z} este obiect inițial Rng_1 , dar \mathbb{Z} nu este obiect final, deci nu este obiect zero.

Obiectul final este inelul zero, în care $0 = 1$.

Exemplul 28 Categoria corpurilor nu are obiect final, nici inițial, dar în categoria corpurilor de caracteristică p , inelul \mathbb{Z}_p este obiect inițial.

Exemplul 29 În categoria Vec_K a spațiilor liniare peste un corp K , un spațiu liniar zero-dimensional este obiect zero.

Exemplul 30 În categoria Top , \emptyset este obiect inițial și orice spațiu topologic singleton este obiect final. Top nu are obiecte zero.

Exemplul 31 În categoria Set , obiectele inițiale, obiectele finale și obiectele zero sunt mulțimile punctate cu un element.

Exerciții

1. Arătați că orice două obiecte inițiale (finale, zero) sunt echivalente.

Soluție. Fie I_1, I_2 inițiale în \mathcal{C} . Rezultă că $\exists! I_1 \xrightarrow{f} I_2$, $\exists! I_2 \xrightarrow{g} I_1$. Pe de altă parte,

$$I_1 f \underset{1_{I_1}}{\overset{g}{\rightrightarrows}} I_1, \quad I_2 g \underset{1_{I_2}}{\overset{f}{\rightrightarrows}} I_2,$$

$$\begin{aligned} I_1 \text{ inițial} &\implies gf = 1_{I_1} \\ I_2 \text{ inițial} &\implies fg = 1_{I_2} \end{aligned} \implies I_1 \sim I_2.$$

■

2. Fie \mathcal{C} o categorie cu un obiect zero Z . Atunci $\forall A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $\exists! O_{AB} : A \rightarrow B$ morfism, astfel încât $O_{AB} = gf$, unde $A \xrightarrow{f} Z$ și $Z \xrightarrow{g} B$.

Soluție. Arătăm că gf nu depinde de Z .

$$\begin{array}{ccc}
 & Z & \\
 f \nearrow & & \searrow g \\
 A & \xrightarrow{gf} & B \\
 f' \searrow & \xrightarrow{g'f'} & \nearrow g \\
 & Z' & \\
 Z \xrightarrow{\alpha} & & Z'
 \end{array}$$

Verificăm că $gf = g'f' \left(\stackrel{\text{not}}{=} O_{AB} \right)$, unde Z' este un alt obiect zero.

Fie α izomorfismul

$$Z \xrightleftharpoons[\beta]{\alpha} Z' .$$

Avem

$$f' = \alpha f, \quad g' = g\beta.$$

Atunci $g'f' = g(\beta\alpha)f = gf$, deoarece $\beta\alpha = 1_{Z'}$.

■

3. Arătați că dacă \mathcal{C} este categorie cu obiecte zero, atunci

$$\begin{array}{l}
 \forall X \xrightarrow{u} A \quad O_{AB}u = O_{XB} \\
 \forall B \xrightarrow{v} Y \quad , \quad vO_{AB} = O_{AY}.
 \end{array}$$

Soluție. Avem $O_{XB} \stackrel{def}{=} g(fu) = O_{AB}u$, unde

$$\begin{array}{ccccc} & & A & & \\ & u \nearrow & & \searrow f & \\ X & \xrightarrow{fu} & Z & \xrightarrow{g} & B \end{array}$$

■

1.3 Monomorfism. Epimorfism. Bimorfism

Fie \mathcal{C} o categorie, $f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Definiția 8 f este **monomorfism** dacă $\forall Z \in \text{Ob } \mathcal{C}, \forall u, v$

$$\begin{array}{ccc} Z & \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \xrightarrow{v} \end{array} & X \xrightarrow{f} Y \\ & & fu = fv \implies u = v. \end{array}$$

Definiția 9 f este **epimorfism** dacă $\forall Z \in \text{Ob } \mathcal{C}, \forall u, v$

$$\begin{array}{ccc} X \xrightarrow{f} Y & \begin{array}{c} \xrightarrow{u} \\ \xrightarrow{v} \end{array} & Z \\ & & uf = vf \implies u = v. \end{array}$$

Definiția 10 f este **bimorfism** dacă f este monomorfism și epimorfism.

Observația 4 Dacă T este obiect final într-o categorie \mathcal{C} și dacă $f : T \rightarrow A$ este un morfism în \mathcal{C} , atunci f este monomorfism.

Propoziția 1 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$.

gf epimorfism $\implies g$ epimorfism;

gf monomorfism $\implies f$ monomorfism.

Demonstrație.

Avem $ug = vg / \cdot f \implies u(gf) = v(gf) \implies u = v$. Similar se arată cealaltă afirmație. ■

Definiția 11 O categorie se numește **balansată** dacă orice bimorfism este un izomorfism.

Vom vedea în paragrafele următoare ca Set, Gr, Ab sunt categorii balansate.

Categoria Rel a relațiilor binare este balansată.

Izomorfismele în Rel sunt aplicațiile bijective.

Într-adevăr, pentru o relație $(A, B; R)$, dacă există (B, A, S) cu $RS = \Delta_B$ și $SR = \Delta_A$, atunci $S = R^{-1}$.

Exerciții.

1. Dați exemple de epimorfisme care nu sunt surjective.

Soluție. Consider categoria inelelor Rng.

Fie $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ incluziunea. i nu este surjectivă.

Arăt că i este epimorfism.

Fie $fi = gi$ și fie $\begin{smallmatrix} r \\ s \end{smallmatrix} \in \mathbb{Q} \xrightarrow[f]{g} R$.

Arăt că $f\left(\begin{smallmatrix} r \\ s \end{smallmatrix}\right) = g\left(\begin{smallmatrix} r \\ s \end{smallmatrix}\right)$.

E suficient să verificăm $f\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ s \end{smallmatrix}\right) = g\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ s \end{smallmatrix}\right)$.

Avem

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{s}\right) f(s) g\left(\frac{1}{s}\right) &= f(1) g\left(\frac{1}{s}\right) = (fi)(1) g\left(\frac{1}{s}\right) = \\ &= (gi)(1) g\left(\frac{1}{s}\right) = g\left(\frac{1}{s}\right). \end{aligned}$$

Pe de altă parte,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{s}\right) f(s) g\left(\frac{1}{s}\right) &= f\left(\frac{1}{s}\right) (gi)(s) g\left(\frac{1}{s}\right) = \\ &= f\left(\frac{1}{s}\right) g(1) = f\left(\frac{1}{s}\right). \end{aligned}$$

Deci $f\left(\frac{1}{s}\right) = g\left(\frac{1}{s}\right)$, de unde $f = g$, adică i este epimorfism. ■

2. Dați exemple de monomorfisme care nu sunt injective.

Soluție. Considerăm categoria grupurilor abeliene divizibile Div.

Un grup $(G, +)$ este divizibil dacă $\forall a \in G, \forall n \in \mathbb{N}^*, \exists b \in G$ astfel încât $a = nb$.

Morfismul $p : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ nu este injectiv, dar arăt că este monomorfism.

Fie $f, g : A \rightarrow \mathbb{Q}$ în Div, cu $f \neq g$.

Rezultă că $\exists a \in A : f(a) - g(a) = \frac{r}{s} \neq 0$ și $s \neq 1$ (altfel, amplificăm cu un astfel de s).

A grup divizibil, deci $a = rb$, de unde $f(a) = rf(b)$. Obținem $f(b) - g(b) = \frac{1}{s}$, de unde $(pf)(b) - (pg)(b) = \frac{1}{s} + \mathbb{Z} \neq 0_{\mathbb{Q}/\mathbb{Z}}$ adică $pf \neq pg$.

Deci, $[f \neq g \implies pf \neq pg] \iff [pf = pg \implies f = g]$, adică p este monomorfism, dar nu este injectiv. ■

1.3.1 Monomorfisme și epimorfisme în Set

Teorema 1 *Un morfism în Set este monomorfism dacă și numai dacă este funcție injectivă.*

Demonstrație. " \Leftarrow " : Considerăm funcțiile $f, g : A \rightarrow B$, $f \neq g$ și $\alpha : B \rightarrow C$, α injectivă. Atunci există $a \in A$ cu $f(a) \neq g(a)$ și cum α este injectivă $\alpha f(a) \neq \alpha g(a)$. Deci, α este monomorfism.

" \implies " : Presupunem că α nu este injectivă. Atunci există $b_1 \neq b_2$ în B cu $\alpha(b_1) = \alpha(b_2)$.

Arătăm că există f, g cu $f \neq g$ și $\alpha f = \alpha g$.

Fie $f : A \rightarrow B$, astfel încât $b_1 \in \text{Im } f$.

Definim $g : A \rightarrow B$ astfel

$$g(a) = \begin{cases} f(a) & \text{dacă } f(a) \neq b_1 \\ b_2 & \text{dacă } f(a) = b_1. \end{cases}$$

Atunci $\alpha f = \alpha g$ și cum α este monomorfism obținem $f = g$, contradicție.

Deci α este injectivă. ■

Teorema 2 *Un morfism în Set este epimorfism dacă și numai dacă este funcție surjectivă.*

Demonstrație.

" \Leftarrow " : Fie $\alpha : A \rightarrow B$ și $f, g : B \rightarrow C$ funcții, astfel încât $f\alpha = g\alpha$.

Fie $b \in B$ arbitrar.

Cum α este surjectivă, există $a \in A$ cu $\alpha(a) = b$.

Din $f\alpha = g\alpha$ rezultă $f(\alpha(a)) = g(\alpha(a))$, adică $f(b) = g(b)$.

Deci, $f = g$.

" \Rightarrow " : Presupunem că α nu este surjectivă.

Atunci există $b_0 \in B$ cu $b_0 \notin \alpha(A)$.

Definim $f, g : B \rightarrow C$ prin $f(b) = g(b)$, pentru orice $b \in B \setminus \{b_0\}$ și $f(b_0), g(b_0)$ arbitrare, dar diferite. (consider $|C| \geq 2$).

Atunci $f\alpha = g\alpha$, dar $f \neq g$, contradicție.

Deci α este surjectivă. ■

1.3.2 Monomorfisme și epimorfisme în Ab

Teorema 3 Fie $f \in \text{Hom}_{\text{Ab}}(X, Y)$. f este monomorfism dacă și numai dacă f este injectiv.

Demonstrație. " \Leftarrow " Imediată.

" \Rightarrow ". Presupunem prin reducere la absurd că f este monomorfism, dar f nu este injectiv.

Obținem diagrama

$$0 \neq \ker f \xrightarrow{i} X \xrightarrow{f} Y.$$

Avem $fi = f0$, dar $i \neq 0$. ■

Teorema 4 Fie $f \in \text{Hom}_{\text{Ab}}(X, Y)$. f este epimorfism dacă și numai dacă f este surjectiv.

Demonstrație. " \Leftarrow " Imediată.

" \Rightarrow ". Presupunem prin reducere la absurd că $f(X) \neq Y$.

Considerăm

$$X \xrightarrow{f} y \xrightarrow[\pi]{0} Y/f(X).$$

Avem $\pi f = 0$, dar $\pi \neq 0$.

■

1.3.3 Monomorfisme și epimorfisme în Gr

Teorema 5 Fie $f : X \rightarrow Y$ un monomorfism de grupuri. Atunci f este injectiv.

Demonstrație. La fel ca în Ab.

■

Teorema 6 Fie $f : X \rightarrow Y$ un epimorfism de grupuri. Atunci f este surjectiv.

Demonstrație. Fie $G = \mathcal{S}(Y/f(X) \cup \{*\})$ grupul substituțiilor mulțimii $Y/f(X) \cup \{*\}$, unde $* \notin Y/f(X)$, iar

$$Y/f(X) = \{yf(X) \mid y \in Y\}.$$

Fie $\sigma = (\hat{e}, *)$ cu $\hat{e} = f(X)$, $\sigma \in G$.

Fie $t : Y \rightarrow G$, $y \rightsquigarrow \hat{y}' \rightsquigarrow \widehat{yy'}$ și $* \rightsquigarrow *$,

$s : Y \rightarrow G$, $y \rightsquigarrow \sigma t(y) \sigma$.

s, t sunt morfisme de grupuri.

Considerăm diagrama $X \xrightarrow{f} y \begin{matrix} \xrightarrow{t} \\ \xrightarrow{s} \end{matrix} G$.

Verificăm că $tf = sf$.

$$\left\{ \begin{array}{l} t(f(x))(\hat{z}) = \widehat{f(x)z} \\ s(f(x))(\hat{z}) = (\sigma t f(x) \sigma)(\hat{z}) = \\ = \begin{cases} (\sigma t f(x))(*) = \sigma(*) = \hat{e}, & \text{pentru } \hat{z} = \hat{e} \\ (\sigma t f(x) \sigma)(\hat{z}) = \sigma(\widehat{f(x)z}) = \widehat{f(x)z}, & \text{pentru } \hat{z} \neq \hat{e}. \end{cases} \end{array} \right.$$

$$t(f(x))(*) = *$$

$$s(f(x))(*) = (\sigma t f(x) \sigma)(*) = \sigma(\hat{e}) = *.$$

Deci, $tf = sf$ și cum f este epi, rezultă $t = s$, de unde

$$\forall y \in Y, \hat{y} = ty(\hat{e}) = sy(\hat{e}) = (\sigma t(y) \sigma)(\hat{e}) = \sigma(*) = \hat{e}.$$

Așadar, $\hat{y} = \hat{e}, \forall y$, adică $y \in f(X)$, deci f surjectiv. ■

1.4 Functori covarianți

Fie \mathcal{C} și \mathcal{D} două categorii.

Pentru a descrie un functor covariant $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, trebuie precizate următoarele două asocieri:

$$\forall X \in \text{Ob } \mathcal{C} \rightsquigarrow F(X) \in \text{Ob } \mathcal{D} \text{ și}$$

$$\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightsquigarrow F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)).$$

Altfel scris:

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & F(X) \\ f \downarrow & & \downarrow F(f) \\ Y & \longrightarrow & F(Y) \end{array}$$

astfel încât

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1) F(1_X) = 1_{F(X)}, \quad \forall X \in \text{Ob } \mathcal{C} \\ F_2) \quad A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \\ \quad \quad F(g \circ f) = F(g) \circ F(f). \end{array} \right.$$

Fie $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$. Considerăm

$$\begin{aligned} F_{X,Y} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) &\rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y)) \\ f &\rightsquigarrow F(f). \end{aligned}$$

F se numește functor *fidel* dacă $\forall X, Y$, $F_{X,Y}$ este injectiv.

F se numește functor *deplin* dacă $\forall X, Y$, $F_{X,Y}$ este surjectiv.

Exemple de functori covarianți

Exemplul 32 *Functorii de uitare.*

$$\begin{aligned} U : \text{Gr} &\rightarrow \text{Set} \\ (G, \cdot) &\rightsquigarrow G \quad (\text{"uită" structura de grup}) \end{aligned}$$

și dacă

$$\begin{aligned} f : (G, \cdot) &\rightarrow (H, \cdot), \text{ atunci} \\ U(f) &= f. \end{aligned}$$

U este fidel, dar nu este deplin (există funcții care nu sunt morfisme).

Similar, $U : R - \text{mod} \rightarrow \text{Ab}$ (nu "uită" tot, ci doar înmulțirea cu scalari).

Exemplul 33 *Functorul identitate.*

$$1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \\ f \downarrow & & \downarrow f \\ Y & \longrightarrow & Y \end{array}$$

$1_{\mathcal{C}}$ este fidel și deplin.

Exemplul 34 Fie (G, \cdot) și (H, \cdot) grupuri și fie categoriile asociate \mathcal{C}_G , \mathcal{C}_H cu $\text{Ob } \mathcal{C}_G = \{*\}$, $\text{Ob } \mathcal{C}_H = \{\Delta\}$.

Definim $F : \mathcal{C}_G \rightarrow \mathcal{C}_H$ astfel:

$$\begin{array}{ccc} * & \longrightarrow & \Delta \\ a \downarrow & & \downarrow f(a) \\ * & \longrightarrow & \Delta \end{array}$$

unde $f : G \rightarrow H$ este morfism de grupuri, iar $a \in G$.

Exemplul 35 *Functorul constant.* Dacă $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$, atunci functorul $K_A : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ se definește astfel:

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & A \\ f \downarrow & & \downarrow 1_A \\ Y & \longrightarrow & A \end{array}$$

K_A nu este fidel, nu este nici deplin.

Exemplul 36 *Functorul $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$, unde \mathcal{C} este categorie arbitrară și $A \in \text{Ob}\mathcal{C}$.*

$$h^A = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \\ f \downarrow & & \downarrow h^A(f) \\ Y & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y) \end{array}$$

$$h^A(f) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, f) : \alpha \longrightarrow f \circ \alpha.$$

h^A se numește functor Yoneda.

Exemplul 37 *Functorul $P : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ este definit astfel:*

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & P(X) \\ f \downarrow & & \downarrow P(f):A \rightarrow f(A) \\ Y & \longrightarrow & P(Y) \end{array}$$

$P(X)$ este mulțimea părților lui X .

P este un functor fidel ($f \neq g \implies P(f) \neq P(g)$).

P nu este deplin (din $g : P(X) \rightarrow P(Y)$ nu rezultă că $|g(x)| = 1$, unde $x \in X$).

Exemplul 38 *Fie $A \neq \emptyset$. Definim $-^A : \text{Gr} \rightarrow \text{Gr}$*

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G^A \\ u \downarrow & & \downarrow u^A \\ H & \longrightarrow & H^A \end{array}$$

unde $G^A = \{f \mid f : A \rightarrow G\}$ este un grup definit astfel

$$\forall f, g \in G^A, \quad (fg)(a) = f(a)g(a),$$

iar $u^A(f) = uf$, unde $A \xrightarrow{f} G \xrightarrow{u} H$.

Exemplul 39

Definiți un functor de la categoria Gr la categoria Ab .

Avem două idei de abordare a problemei.

- Dacă am considera diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & Z(G) \\ f \downarrow & & \downarrow f/Z(G) \\ H & \longrightarrow & Z(H) \end{array}$$

remarcăm că $f(Z(G)) \not\subseteq Z(H)$ în general.

De exemplu, pentru $G = \{e, (1\ 2)\}$, $H = \mathcal{S}_3$, $f = i$, incluziune canonică, $Z(\mathcal{S}_3) = \{e\}$, avem

$$Z\left(\left\{e, \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}, 0\right) = \left(\left\{e, \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\right\}, 0\right) \not\subseteq \{e\}.$$

Să remarcăm că un functor păstrează injectivitatea/ surjectivitatea. (din $f : A \rightarrow B$ injectivă rezultă că există $r : B \rightarrow A$, astfel încât $rf = 1_A$ de unde $F(r)F(f) = 1_{F(A)}$, adică $F(f)$ este injectivă. Similar pentru surjectivitate. Totodată, izomorfismele sunt păstrate prin functori.) Așadar această abordare nu este bună.

- O altă idee este cea de a considera grupul factor $G/D(G)$, care este abelian.

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G/D(G) \\ f \downarrow & & \downarrow \bar{f} \\ H & \longrightarrow & H/D(H) \end{array}$$

unde $\bar{f}(xD(G)) = f(x)D(H)$.

\bar{f} este bine definit. Într-adevăr, $xD(G) = yD(G)$ implică $xy^{-1} \in D(G)$ adică $xy^{-1} = x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1} \dots x_ky_kx_k^{-1}y_k^{-1}$, pentru anumiți $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k$ din G , de unde

$$f(x)f(y)^{-1} = f(x_1)f(y_1)f(x_1)^{-1}f(y_1)^{-1} \dots$$

$\dots f(x_k)f(y_k)f(x_k)^{-1}f(y_k)^{-1}$. Deci, $f(x)f(y)^{-1} \in D(H)$.

Functorul obținut astfel se notează cu Abel.

Ca exercițiu, să determinăm $\text{Abel}(S_3) = S_3/D(S_3)$.

$D(S_3) \triangleleft S_3$ și $D(S_3) \neq \{e\}$ pentru că S_3 nu este abelian. Rezultă $D(S_3) = S_3$ sau $D(S_3) = \left\{e, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right\}$.

Dar elementele lui $D(S_3)$ sunt toate permutări pare, pentru că $x, y \in S_3$ implică $xyx^{-1}y^{-1}$ permutare pară.

Deci, $D(S_3) \neq S_3$.

Rezultă că

$$D(S_3) = \left\{e, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Deci, $|D(S_3)| = 3$ de unde $|S_3/D(S_3)| = 2$, prin urmare $S_3/D(S_3) \simeq \mathbb{Z}_2$ adică $\text{Abel}(S_3) \simeq \mathbb{Z}_2$.

■

1.5 Functori contravarianți

Introducem mai întâi următoarea noțiune

Duala unei categorii

Fie \mathcal{C} o categorie. Definim \mathcal{C}^{op} astfel:

$$\left[\begin{array}{l} \cdot \text{Ob } \mathcal{C}^{op} = \text{Ob } \mathcal{C} \\ X \in \text{Ob } \mathcal{C} \text{ va fi notat și } X^{op} \\ \cdot \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X^{op}, Y^{op}) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \\ \cdot \text{compunerea morfismelor :} \\ Z \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} X \text{ înseamnă } \begin{array}{l} X^{op} \xrightarrow{f^{op}} Y^{op} \xrightarrow{g^{op}} Z^{op} \\ g^{op} \circ f^{op} = (f \circ g)^{op}. \end{array} \end{array} \right.$$

Fie $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ un functor covariant. Atunci $\tilde{F} : \mathcal{C}^{op} \rightarrow \mathcal{D}$ este un functor **contravariant**, adică pentru $X \xrightarrow{f} Y$,

$$\begin{array}{ccc} X^{op} & \longrightarrow & \tilde{F}(X) \\ f^{op} \uparrow & & \downarrow \tilde{F}(f^{op})=F(f) \\ Y^{op} & \longrightarrow & \tilde{F}(Y) \end{array}$$

Avem, $\tilde{F}(1_X) = 1_{\tilde{F}(X)}$ și

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \tilde{F}(X) \\ f^{op} \uparrow & & \downarrow \tilde{F}(f^{op}) \\ Y & \longrightarrow & \tilde{F}(Y) \\ g^{op} \uparrow & & \downarrow \tilde{F}(g^{op}) \\ Z & \longrightarrow & \tilde{F}(Z) \end{array}$$

$$\tilde{F}(f^{op} \circ g^{op}) = \tilde{F}((gf)^{op}) = F(gf) = F(g)F(f) = \tilde{F}(g^{op})\tilde{F}(f^{op}).$$

Definiția 12 A da un **functor contravariant** $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ înseamnă a asocia

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & F(X) \\ h \downarrow & & \uparrow F(h) \\ Y & \longrightarrow & F(Y) \end{array}$$

astfel încât:

1. $F(1_X) = 1_{F(X)}$, $\forall X \in \text{Ob } \mathcal{C}$;
2. $F(fg) = F(g)F(f)$, $\forall X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$ și $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$.

Observația 5 Functorii contravarianți întorc sensul săgeților (morfismele).

Observația 6 Există o corespondență bijectivă între clasa functorilor contravarianți și clasa functorilor covarianți.

Exemple de functori contravarianți

Exemplul 40 Considerăm $Q : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$ definit astfel:

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & P(X) \\ f \downarrow & & \uparrow \\ Y & \longrightarrow & P(Y) \end{array}$$

unde $B \in P(Y) \rightsquigarrow f^{-1}(B) \in P(X)$. Reamintim functorul covariant $P : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & P(X) \\ f \downarrow & & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & P(Y) \end{array}$$

unde $A \in P(X) \rightsquigarrow f(A) \in P(Y)$. Obiectele sunt duse la fel prin cei doi functori.

Exemplul 41 Fie $h_X = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, X) : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$, unde $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$.

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \\ f \downarrow & & \uparrow \\ B & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X) \end{array}$$

unde $\alpha \rightsquigarrow \alpha f$ și $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\alpha} X$.

1.6 Morfisme functoriale (transformări naturale)

Definiția 13 Fie $\mathcal{C} \begin{smallmatrix} F \\ \rightrightarrows \\ G \end{smallmatrix} \mathcal{D}$, unde F, G sunt functori covarianți, iar \mathcal{C}, \mathcal{D} sunt categorii.

Un **morfism functorial** $\alpha : F \rightarrow G$ se definește astfel:

$\forall X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, este dat α_X , astfel încât

$\forall X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $\forall f : X \rightarrow Y$, următoarea diagramă în \mathcal{D} este comutativă

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\alpha_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\alpha_Y} & G(Y) \end{array} .$$

Definiția 14 Morfismul functorial α se numește **echivalență normală** de functori, dacă $\forall X \in \text{Ob}$, α_X este izomorfism în \mathcal{D} .

Compunerea morfismelor functoriale

Fie F, G, H trei functori de același tip, de exemplu covarianți, de la categoria \mathcal{C} la categoria \mathcal{D} și fie morfismele functoriale

$$F \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} H.$$

Definim $(\beta\alpha)(X) = \beta_X\alpha_X$. Verificăm că $\beta\alpha$ este morfism functorial, adică următoarea diagramă este comutativă:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\beta_X\alpha_X} & H(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow H(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\beta_Y\alpha_Y} & H(Y) \end{array}$$

Avem

$$\begin{aligned}\beta_Y [\alpha_Y F(f)] &= \beta_Y [G(f) \alpha_X] = [\beta_Y G(f)] \alpha_X = \\ &= [H(f) \beta_X] \alpha_X = H(f) \beta_X \alpha_X.\end{aligned}$$

Considerăm acum următoarea diagramă de functori:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \rightrightarrows \\ \xrightarrow{G} \end{array} & \mathcal{D} \xrightarrow{H} \mathcal{E}, \\ & & \\ & & F \xrightarrow{\alpha} G, \end{array}$$

unde α este un morfism functorial.

Definim morfismul functorial:

$$\begin{aligned}H\alpha &: HF \rightarrow HG \\ \forall X \in \text{Ob } \mathcal{C}, & (HF)(X) = H(F(X))\end{aligned}$$

și dacă $X \xrightarrow{f} Y$, atunci următoarea diagramă este comutativă

$$\begin{array}{ccc} H(F(X)) & \xrightarrow{(H\alpha)_X} & H(G(X)) \\ \downarrow H(F(f)) & & \downarrow H(G(f)) \\ H(F(Y)) & \xrightarrow{(H\alpha)_Y} & H(G(Y)) \end{array}$$

Similar, putem considera

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \xrightarrow{E} & \mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \downarrow \alpha \\ \xrightarrow{G} \end{array} & \mathcal{D} \end{array}$$

cu $FE \xrightarrow{\alpha E} GE$ și rezultă că αE este un morfism functorial.

1.7 Teorema lui Yoneda

Teorema 7 (Lema lui Yoneda) Dacă $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ este un functor covariant, $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ și notăm cu $\text{Hom}(h^X, F)$ clasa tuturor transformărilor naturale de la h^X la F , atunci există o bijecție între $F(A)$ și $\text{Hom}(h^A, F)$:

$$\begin{aligned} \varphi : \text{Hom}(h^A, F) &\rightarrow F(A) \\ \alpha &\rightsquigarrow \alpha_A(1_A). \end{aligned}$$

Demonstrație. Fie $\alpha \in \text{Hom}(h^A, F)$.

Considerăm următoarea diagramă comutativă pentru orice morfism $u \in h^A(X) = \mathcal{C}(A, X)$ din \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(A, A) & \xrightarrow{\alpha_A} & F(A) \\ \mathcal{C}(A, u) \downarrow & & \downarrow F(u) \\ \mathcal{C}(A, X) & \xrightarrow{\alpha_X} & F(X) \end{array}$$

Rezultă că $\alpha_X(u) = (F(u))(\alpha_A(1_A))$ și deci, dacă

$$\alpha, \beta \in \text{Hom}(h^A, F)$$

sunt astfel încât $\alpha_A(1_A) = \beta_A(1_A)$, atunci $\alpha_X = \beta_X$ pentru orice $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, de unde $\alpha = \beta$.

Deci, φ este injectivă.

Fie acum $a \in F(A)$. Pentru orice $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$, definim

$$\begin{aligned} \beta_X^a : h^A(X) = \mathcal{C}(A, X) &\rightarrow F(X) \\ u &\rightsquigarrow F(u)(a). \end{aligned}$$

Verificăm că β_X^a sunt componentele unei transformări naturale $\beta^a : h^A \rightarrow F$, adică dacă $u : X \rightarrow Y$ este un morfism din \mathcal{C} , atunci următoarea diagramă este comutativă:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(A, X) & \xrightarrow{\beta_X^a} & F(X) \\ \mathcal{C}(A, u) \downarrow & & \downarrow F(u) \\ \mathcal{C}(A, Y) & \xrightarrow{\beta_Y^a} & F(Y) \end{array}$$

Într-adevăr, pentru orice $f \in \mathcal{C}(A, X)$, avem:

$$(F(u))(\beta_X^a(f)) = (F(u))(F(f)(a)) = F(uf)(a)$$

și

$$\beta_Y^a((\mathcal{C}(A, u))(f)) = \beta_Y^a(uf) = F((uf)(a))$$

și deci, ultima diagrama este comutativă.

Mai mult, $\varphi(\beta^a) = \beta_A^a(1_A) = F(1_A)(a) = 1_{F(A)}(a) = a$, de unde rezultă că φ este de asemenea surjectivă, deci este bijectivă. ■

Exerciții

1. Fie \mathcal{C} categorie, $A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}$. Există un morfism functorial între h^A și h^B ? Dați o condiție pentru existență.

Soluție.

Fie $\alpha : h^A \rightarrow h^B$, $h^A(X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) & \xrightarrow{\alpha_X} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X) \\ h^A(f) \downarrow & & \downarrow h^B(f) \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y) & \xrightarrow{\alpha_Y} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, Y) \end{array}$$

unde $B \xrightarrow{u} A \xrightarrow{f} X$.

Putem defini $\alpha_X : f \rightsquigarrow fu$ dacă $\exists u \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$.

În acest caz, α este un morfism functorial. ■

2. Dacă $X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$, așa încât Y este obiect inițial în \mathcal{C} , atunci $|\text{Hom}(h^X, h^Y)| = 1$.

Soluție.

Avem $h^X, h^Y : \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$.

Conform teoremei Yoneda,

$$\text{Hom}(h^X, h^Y) \simeq h^Y(X) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X).$$

Dacă Y este obiect inițial în \mathcal{C} , atunci $|\text{Hom}(h^X, h^Y)| = 1$.

1.8 Produs de categorii

Fie \mathcal{C} și \mathcal{D} categorii. Definim *produsul* $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ astfel:

$$\left[\begin{array}{l} \cdot \text{Ob}(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) = \text{Ob } \mathcal{C} \times \text{Ob } \mathcal{D}; \\ \cdot \text{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((X, Y), (X', Y')) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X') \times \text{Hom}_{\mathcal{D}}(Y, Y') \\ \cdot \text{compunerea se face pe componente.} \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} (X, Y) &\xrightarrow{(u, v)} (X', Y') \xrightarrow{(u', v')} (X'', Y'') \\ (u', v') \circ (u, v) &= (u'u, v'v). \end{aligned}$$

Analog se definește produsul unei familii de categorii $\{\mathcal{C}_i\}_{i \in I}$.

Observația 7 *Un functor $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ se poate descompune în doi functori:*

$$F_1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}, \quad F_2 : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}.$$

Exemplul 42 $\text{Hom} : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ este definit astfel:

$$\begin{array}{ccc} (X^{op}, Y) & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \\ (f^{op}, g) \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, g) \\ (X'^{op}, Y') & \longrightarrow & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', Y') \end{array}$$

unde

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha} & Y \\ f \uparrow & & \downarrow g \\ X' & & Y' \end{array}$$

$X \xrightarrow{\alpha} Y$ implică $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(f, g)(\alpha) = g\alpha f$.

Hom este un functor, adică:

$$\left[\begin{array}{l} \cdot \text{Hom}(1_{X^{op}}, 1_Y) = 1_{\text{Hom}(X^{op}, Y)} \\ \cdot \text{Hom}(f', g') \circ \text{Hom}(f, g) = \text{Hom}(f'f', g'g), \end{array} \right.$$

unde $f'f' = (f'f)^{op}$.

Să remarcă faptul că $\text{Hom} : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \text{Set}$ este un functor covariant în a doua variabilă și contravariant în prima variabilă.

Capitolul 2

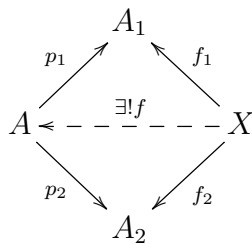
Produse și coproduse în categorii

2.1 Produs direct

Fie \mathcal{C} categorie și $A_1, A_2 \in \text{Ob } \mathcal{C}$.

Definiția 15 Tripletul (A, p_1, p_2) cu $A \in \text{Ob } \mathcal{C}$ este **produs direct** pentru A_1, A_2 , dacă

$$\forall X \in \text{Ob } \mathcal{C}, \forall f_i : X \rightarrow A_i, \exists! f : X \rightarrow A : p_i f = f_i, i = 1, 2.$$



Definiția 16 (generalizare) Fie $\{A_i\}_{i \in I} \subset \text{Ob } \mathcal{C}$. $(A, (p_i)_{i \in I})$ se numește **produs direct** dacă

$$\forall X \in \text{Ob } \mathcal{C}, \forall f_i : X \rightarrow A_i, \exists ! f : X \rightarrow A : p_i f = f_i, i \in I.$$

Definiția 17 Spunem că o categorie \mathcal{C} **are produse** (finite) dacă orice familie (finită) de obiecte din \mathcal{C} are produs în \mathcal{C} .

Produsul direct al familiei $\{A_i\}_{i \in I}$ se notează cu $\prod_{i \in I} A_i$.

Dacă $I = \{1, 2, \dots, n\}$ notăm cu $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ produsul direct al familiei $\{A_i\}_{i \in \{1, 2, \dots, n\}}$.

Exerciții

1. Categoria Set are produse directe.

Soluție. Fie $\prod_{i \in I} A_i = \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \mid \forall i \in I, f(i) \in A_i \right\}$,

unde $\forall j \in I, p_j : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_j, p_j(f) = f(j)$.

Atunci, $\left(\prod_{i \in I} A_i, \{p_j\}_{j \in I} \right)$ este produs direct al familiei $\{A_i\}_{i \in I}$.

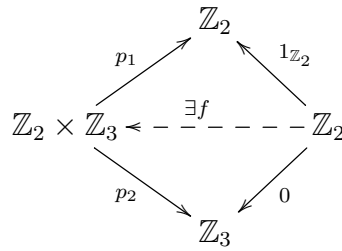
■

2. Categoria corpurilor \mathcal{K} nu are produse directe.

Soluție. \mathcal{K} nu are produse directe deoarece un produs direct de corpuri nu este domeniu de integritate, deci nu este corp.

Sau:

Presupunem că $\exists \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ produs direct în \mathcal{K} .



Din $p_1 f = 1_{\mathbb{Z}_2}$ rezultă p_1 surjectiv, dar p_1 este și injectiv, fiind morfism de corpuri, deci p_1 este un izomorfism.

Așadar, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \simeq \mathbb{Z}_2$.

Similar, $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \simeq \mathbb{Z}_3$, fals.



3. Categoria Ab (a $\mathbb{Z} - \text{mod}$) este cu produse directe.
4. Categoria $\overline{\text{Ab}}$ a grupurilor abeliene finit generate nu are produse directe pentru familii infinite (nu mai sunt finit generate).
5. Categoria grupurilor ciclice nu are produse directe.

Soluție. $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \simeq \mathbb{Z}_{nm} \iff (n, m) = 1$.

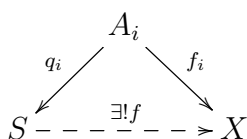
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ nu este ciclic.



2.2 Noțiunea duală. Coprodus

Fie $\{A_i\}_{i \in I}$ o familie de obiecte din categoria \mathcal{C} .

Definiția 18 Perechea $(S, \{q_i\}_{i \in I})$, unde $S \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $q_i : A_i \rightarrow S$, $\forall i \in I$, este **coprodus** pentru $\{A_i\}_{i \in I}$, dacă:



$$\forall X \in \text{Ob } \mathcal{C}, \forall f_i : A_i \rightarrow X, \exists! f : S \rightarrow X, f q_i = f_i, \forall i \in I.$$

Definiția 19 Spunem că o categorie \mathcal{C} **are coproduse** (finite) dacă orice familie (finită) de obiecte din \mathcal{C} are coprodus în \mathcal{C} .

Coprodusul familiei de obiecte $\{A_i\}_{i \in I}$ într-o categorie \mathcal{C} se notează cu $\bigoplus_{i \in I} A_i$ sau cu $\bigsqcup_{i \in I} A_i$.

Exemplul 43 În Ab , coprodusul familiei $\{A_i\}_{i \in I}$ este :

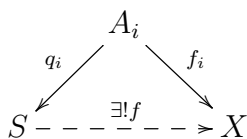
$$\begin{aligned}
 \bigoplus_{i \in I} A_i &= \{(a_i)_{i \in I} \mid a_i = 0, \text{ cu excepția unui număr finit de componente}\}; \\
 \bigoplus_{i \in I} A_i &\leq \prod_{i \in I} A_i, \text{ cu egalitate pentru } I \text{ finită};
 \end{aligned}$$

Exemplul 44 În $R - \text{mod}$, $\exists \bigoplus_{i \in I} A_i$, $\exists \prod_{i \in I} A_i$ și $\bigoplus_{i \in I} A_i \leq \prod_{i \in I} A_i$.

Exemplul 45 Coprodus în Set .

Considerăm $S = \bigcup_{i \in I} A_i \times \{i\}$ reuniunea disjunctă,

$$\begin{aligned}
 q_i &: A_i \rightarrow S, \quad i \in I \\
 a_i &\rightsquigarrow (a_i, i)
 \end{aligned}$$



Existența și unicitatea lui f rezultă din echivalența

$$f((a_i, i)) = f_i(a_i) \iff f q_i = f_i, \forall i \in I.$$

Exemplul 46 Dacă (A, \leq) este o mulțime parțial ordonată, considerată ca o categorie în care obiectele sunt elementele lui A și pentru $a, a' \in A$,

$$\text{Hom}(a, a') = \begin{cases} (a, a') & \text{dacă } a \leq a' \\ \emptyset & \text{altfel} \end{cases},$$

atunci produsul a două obiecte este infimumul lor, iar coprodusul este supremul lor, dacă există.

Soluție. Într-adevăr, produsul familiei $\{a_i\}_{i \in I}$ are proprietățile:

$$p \leq a_i \text{ și pentru orice } p' \leq a_i, \forall i \in I \text{ rezultă } p' \leq p.$$

Așadar o familie de elemente din A are produs dacă și numai dacă are infimum și are coprodus dacă și numai dacă are supremum.

Deci, o mulțime ordonată are produse dacă și numai dacă are coproduse dacă și numai dacă este o latice completă. ■

Următoarea teoremă prezintă o situație în care o categorie nu are nici produse, nici coproduse finite.

Teorema 8 Fie \mathcal{C} o categorie, în care orice morfism este monomorfism și astfel încât există două morfisme distincte cu aceeași sursă și aceeași cosursă. Atunci:

- i) \mathcal{C} nu are produse finite;
- ii) \mathcal{C} nu are coproduse finite;
- iii) Categoria *Field* nu are nici produse, nici coproduse finite.

Demonstrație.

- i) Fie f și g morfisme distincte în categoria \mathcal{C} , cu domeniul A și codomeniul B .

Presupunem prin reducere la absurd că există produsul

$$(A \times B, p_A, p_B)$$

și considerăm morfismele $1_A : A \rightarrow A$, $f : A \rightarrow B$.

Atunci există un unic morfism $h : A \rightarrow A \times B$, încât $1_A = p_A h$ și $f = p_B h$.

Similar, pentru morfismele 1_A și g , există un unic morfism $k : A \rightarrow A \times B$ încât $1_A = p_A k$ și $g = p_B k$.

Întrucât toate morfismele sunt monomorfisme, din

$$1_A = p_A h = p_A k$$

obținem $h = k$, de unde $f = p_B h = p_B k = g$, contradicție.

- ii) Presupunem că există coprodusul $A \sqcup B$. De aici rezultă că există morfismele h, k , încât

$$1_A = h q_A, f = h q_B, 1_B = k q_A, g = k q_B,$$

unde $q_A : A \rightarrow A \sqcup B$ și $q_B : B \rightarrow A \sqcup B$ sunt morfismele din definiția coprodusului.

Atunci h este o refracție care fiind și monomorfism este un izomorfism.

Rezultă q_A izomorfism, deci și epimorfism, de unde $h = k$, adică $f = g$, contradicție.

iii) În *Field* orice morfism este monomorfism și există două morfisme distincte cu același domeniu și același codomeniu

$$u, v : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, u(z) = z, v(z) = \bar{z}.$$

Deci *Field* nu are produse și coproduse finite.



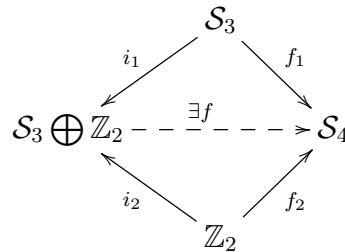
Sume directe în Gr

Suma directă de grupuri

$\bigoplus_{i \in I} G_i = \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} G_i \mid f(i) \neq 1 \right\}$ nu este coprodus în Gr, după cum se observă din următorul exemplu.

Coprodusul în Gr este produsul liber de grupuri.

Exemplul 47 Considerăm diagrama



unde

- $i_1(\sigma) = (\sigma, \hat{0}), \forall \sigma \in \mathcal{S}_3$
- $i_2(\hat{n}) = (\varepsilon, \hat{n}),$ unde ε este permutarea identică din \mathcal{S}_3 .

- Orice permutare σ din \mathcal{S}_3 este dusa prin f_1 în permutarea σ_1 din \mathcal{S}_4 , pentru care $\sigma_1(i) = \sigma(i)$, $\forall i \in \{1, 2, 3\}$, $\sigma_1(4) = 4$.
- $f_2(\hat{0}) = \varepsilon$, $f_2(\hat{1})$ este transpoziția $(1\ 4)$.

Presupunem că $\mathcal{S}_3 \oplus \mathbb{Z}_2$ este coprodus în categoria Gr.

Atunci $\exists! f : \mathcal{S}_3 \times \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathcal{S}_4$ astfel încât $f i_1 = f_1$ și $f i_2 = f_2$.

$$\begin{cases} \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right) = f_1 \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right) = f i_1 \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right) = \\ = f \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \hat{0} \right) \right) \in \text{Im } f \\ \left(\begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \right) = f_2(\hat{1}) = f i_2(\hat{1}) = f(\varepsilon, \hat{1}) \in \text{Im } f \end{cases}$$

Am notat cu $(1\ 2\ 3)$ ciclul de lungime 3, văzut ca element al lui \mathcal{S}_3 și al lui \mathcal{S}_4 .

Deci, $\mathcal{S}_4 = \left\langle \left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix} \right) \right\rangle \leq \text{Im } f \leq \mathcal{S}_4$, de unde

$\text{Im } f = \mathcal{S}_4$ și deci $|\text{Im } f| = 24$.

Dar, $|\mathcal{S}_3 \oplus \mathbb{Z}_2| = 12 \implies |\text{Im } f| \leq 12$, contradicție.

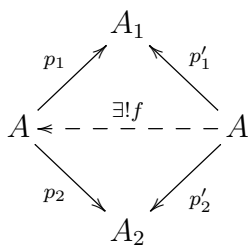
Deci, $\mathcal{S}_3 \oplus \mathbb{Z}_2$ nu este coprodus în categoria Gr.

2.3 Unicitatea produsului direct. Unicitatea coprodusului

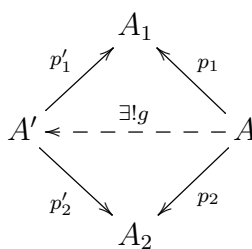
Teorema 9 Fie $A_1, A_2 \in \text{Ob } \mathcal{C}$. Dacă (A, p_1, p_2) și (A', p_1, p_2) sunt produse directe pentru A_1 și A_2 în \mathcal{C} , atunci $A \sim A'$.

Demonstrație. Folosim așa-numita tehnică a "vânătoarii de diagrame".

Considerăm diagramele



cu $p_i f = p'_i$, $i = 1, 2$ și



cu $p'_i g = p_i$, $i = 1, 2$.

Atunci $p_i (fg) = p_i$, $i = 1, 2$ de unde $fg = 1_A$.
 $p_i 1_{A'} = p_i$, $i = 1, 2$

Analog, $gf = 1_{A'}$. Deci $A \sim A'$. ■

Similar cu cazul finit, se arată că

Teorema 10 *Dacă o categorie are produse, atunci acestea sunt unice, până la un izomorfism.*

Teorema 11 *Dacă o categorie are coproduse, atunci acestea sunt unice, până la un izomorfism.*

2.4 Familie monomorfică. Familie epimorfică

Fie $\{f_i\}_{i \in I}$ familie de morfisme în categoria \mathcal{C} , $X \xrightarrow{f_i} Y$, $\forall i \in I$.

Definiția 20 Familia $\{f_i\}$ este o **familie monomorfică** dacă

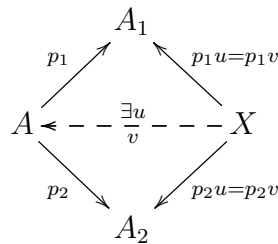
$$(f_i u = f_i v, \forall i \in I) \implies u = v.$$

Definiția 21 Familia $\{f_i\}$ este o **familie epimorfică** dacă

$$(u f_i = v f_i, \forall i \in I) \implies u = v.$$

Teorema 12 Dacă (A, p_1, p_2) este produs direct în \mathcal{C} pentru A_1 și A_2 , atunci $\{p_1, p_2\}$ este o familie monomorfică.

Demonstrație. Considerăm egalitățile $p_1 u = p_1 v$, $p_2 u = p_2 v$ și construim următoarea diagramă



Tripletul (A, p_1, p_2) este produs direct, deci $u = v$.

Așadar, $\{p_1, p_2\}$ este o familie monomorfică. ■

Teorema 13 Dacă (S, q_1, q_2) este coprodus în \mathcal{C} pentru A_1 și A_2 , atunci $\{q_1, q_2\}$ este o familie epimorfică.

Teorema 14 *Dacă o categorie \mathcal{C} are obiecte zero și produse directe, atunci morfismele p_i din definiția produsului direct sunt epimorfisme.*

Demonstrație. Considerăm diagrama

$$\begin{array}{ccc} & A_i & \\ p_i \nearrow & & \nwarrow \delta_{ij} \\ A & \xleftarrow{\exists! f} & A_j \end{array}$$

unde δ_{ij} se poate defini, pentru că există obiecte zero.

$$\begin{aligned} \delta_{ii} &= 1_{A_i} \\ \delta_{ij} &= 0_{A_j A_i}, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Din $p_i f = 1_{A_i}$ (pentru $i = j$) rezultă că p_i este un epimorfism. ■

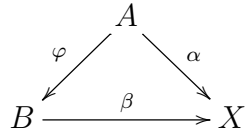
Teorema 15 *Dacă o categorie \mathcal{C} are obiecte zero și coproduse, atunci morfismele q_i din definiția coprodusului sunt monomorfisme.*

2.5 Produs direct în categoria \mathcal{C}/X , unde $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$

Considerăm categoria \mathcal{C}/X , ale cărei obiecte au forma

$$\{(A, \alpha) \mid A \xrightarrow{\alpha} X\}.$$

Morfismele acestei categorii au forma : $(A, \alpha) \xrightarrow{\varphi} (B, \beta)$, unde $\beta\alpha = \varphi$.



Observația 8 Putem defini un functor covariant $F : \mathcal{C}/X \rightarrow \mathcal{C}$, astfel

$$\begin{array}{ccc}
 (A, \alpha) & \longrightarrow & A \\
 \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\
 (B, \beta) & \longrightarrow & B
 \end{array}$$

Prodot direct în \mathcal{C}/X a două obiecte

Fie $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2) \in \text{Ob } \mathcal{C}/X$. Atunci (P, φ) împreună cu

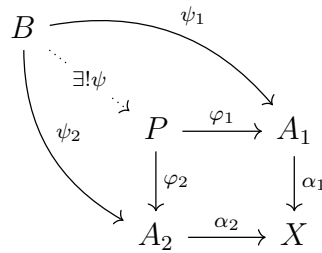
$$\begin{array}{l}
 (P, \varphi) \xrightarrow{\varphi_1} (A_1, \alpha_1) \\
 (P, \varphi) \xrightarrow{\varphi_2} (A_2, \alpha_2)
 \end{array}$$

este **produsul lor direct** dacă:

$$\forall (B, \beta) \text{ și } \begin{array}{l} \forall (B, \beta) \xrightarrow{\psi_1} (A_1, \alpha_1) \\ \forall (B, \beta) \xrightarrow{\psi_2} (A_2, \alpha_2) \end{array} \text{ a.î. } \alpha_1\psi_1 = \alpha_2\psi_2 = \eta,$$

$$\exists! \psi : B \rightarrow P, \psi : (B, \beta) \rightarrow (P, \varphi) \text{ astfel încât } \begin{cases} \varphi_1\psi = \psi_1 \\ \varphi_2\psi = \psi_2. \end{cases}$$

Obținem diagrama

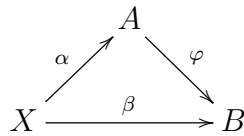


Produsul direct a două obiecte în \mathcal{C}/X ne conduce la noțiunea de produs fibrat al unei diagrame colț în categoria \mathcal{C} .

Duala categoriei \mathcal{C}/X este notată X/\mathcal{C} și se definește astfel:

$$\text{Ob } X/\mathcal{C} = \{(A, \alpha) \mid X \xrightarrow{\alpha} A\}$$

$$\text{Hom } X/\mathcal{C} = \{(A, \alpha), (B, \beta)\} = \{\varphi : A \rightarrow B \mid \varphi\alpha = \beta\}.$$



Coprodusul a două obiecte din categoria X/\mathcal{C} ne conduce la noțiunea de sumă fibrată în categoria \mathcal{C} .

Noțiunile de produs fibrat și de sumă fibrată fac obiectul de studiu al capitolului următor.

Capitolul 3

Produse și sume fibrante

3.1 Produs fibrat

Definiția 22 Considerăm *diagrama colț*:

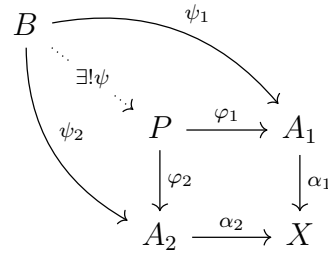
$$\begin{array}{ccc} & & A_1 \\ & & \downarrow \alpha_1 \\ A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & X \end{array}$$

Spunem că $(P, \varphi_1, \varphi_2)$ este **produs fibrat** al *diagramei colț* de mai sus, dacă

$\forall (B, \psi_1, \psi_2)$ cu $\alpha_1\psi_1 = \alpha_2\psi_2$, $\exists! \psi : B \rightarrow P$ astfel încât

$$\varphi_i\psi = \psi_i, \quad i = 1, 2.$$

Obținem *diagrama*



Definiția 23 Spunem că pătratul comutativ

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xrightarrow{\varphi_1} & A_1 \\
 \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \alpha_1 \\
 A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & X
 \end{array}$$

este **cartezian** dacă acesta reprezintă un produs fibrat, adică dacă $(P, \varphi_1, \varphi_2)$ este produs fibrat pentru (α_1, α_2) .

Definiția 24 Spunem că o categorie \mathcal{C} are **produse fibrat** dacă orice diagramă colț, de tipul (α_1, α_2) , are produs fibrat.

Exemple de produse fibrat

Exemplul 48 Set are produse fibrat.

Soluție. Considerăm o diagramă colț (α_1, α_2) ca în definiția de mai sus. Fie mulțimea

$$P = \{(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2 \mid \alpha_1(a_1) = \alpha_2(a_2)\}$$

și p_1, p_2 proiecțiile canonice $p_i : A_1 \times A_2 \rightarrow A_i, i = 1, 2$.

Avem $\alpha_1(a_1) = \alpha_1 p_1(a_1, a_2)$ și $\alpha_2(a_2) = \alpha_2 p_2(a_1, a_2)$, de unde rezultă că $\alpha_1 p_1 = \alpha_2 p_2$. Urmărim diagrama de mai sus.

Date ψ_1 și ψ_2 astfel încât $\alpha_1\psi_1 = \alpha_2\psi_2$, definim $\psi : B \rightarrow P$, $\psi(b) = (\psi_1(b), \psi_2(b))$.

Din $\alpha_1(\psi_1(b)) = \alpha_2(\psi_2(b))$ rezultă că $\psi(b) = (\psi_1(b), \psi_2(b)) \in P$. În plus, $p_1\psi = \psi_1$ și $p_2\psi = \psi_2$.

Verificăm acum unicitatea lui ψ .

Presupunem că $\bar{\psi}(b) = (\alpha(b), \beta(b))$, $\alpha(b) \in A_1$, $\beta(b) \in A_2$ este astfel încât $p_i\bar{\psi} = \psi_i$. Obținem $\begin{cases} \alpha(b) = \psi_1(b) \\ \beta(b) = \psi_2(b) \end{cases}$ de unde $\bar{\psi} = \psi$.

Deci (P, p_1, p_2) este produs fibrat în Set al diagramei colț (α_1, α_2) . ■

Exemplul 49 Ab are produse fibrat.

Soluție. Considerăm diagrama:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p_1} & A_1 \\ p_2 \downarrow & & \downarrow \alpha_1 \\ A & \xrightarrow{\alpha_2} & A \end{array}$$

Fie $A_1 \times A_2 \in \text{Ob Ab}$,

$$P = \{(a_1, a_2) \in A_1 \times A_2 \mid \alpha_1(a_1) = \alpha_2(a_2)\}.$$

P este subgrup al lui $A_1 \times A_2$, deci $P \in \text{Ob Ab}$.

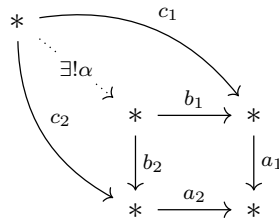
Din $(a_1, a_2), (a'_1, a'_2) \in P$ rezultă $(a_1 - a'_1, a_2 - a'_2) \in P$. Așadar, $(P, \varphi_1, \varphi_2)$ este produs fibrat al diagramei colț (α_1, α_2) . ■

Exemplul 50 Categoria \mathcal{C}_G , unde G este un grup, are produse fibrat.

Soluție. Avem

$$\begin{cases} \text{Ob } \mathcal{C}_G = \{*\} \\ \text{Hom}_{\mathcal{C}_G}(*, *) = G. \end{cases}$$

Fie diagrama



cu $a_1, a_2 \in G$.

Produsul fibrat este $(*, a_1^{-1}, a_2^{-1})$, adică $b_1 = a_1^{-1}$, $b_2 = a_2^{-1}$.

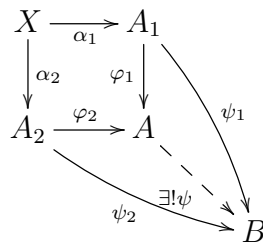
Într-adevăr, dacă $a_1 c_1 = a_2 c_2$, atunci aratăm că $\exists \alpha \in G$, încât

$$b_i \alpha = c_i, \quad i = 1, 2.$$

Consider $\alpha = b_1^{-1} c_1 = a_1 c_1 = a_2 c_2$. Avem $b_2 \alpha = b_2 a_2 c_2 = a_2^{-1} a_2 c_2 = c_2$. ■

3.2 Sumă fibrată (noțiunea duală)

Definiția 25 Considerăm diagrama în categoria \mathcal{C}



Tripletul $(A, \varphi_1, \varphi_2)$ este **sumă fibrată** pentru diagrama colț (α_1, α_2) , dacă pentru orice triplet (B, ψ_1, ψ_2) astfel încât

$$\psi_1 \alpha_1 = \psi_2 \alpha_2, \exists! \psi : A \rightarrow B \text{ încât } \begin{cases} \psi \varphi_1 = \psi_1 \\ \psi \varphi_2 = \psi_2. \end{cases}$$

Definiția 26 Spunem că pătratul comutativ

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\alpha_1} & A_1 \\ \downarrow \alpha_2 & & \downarrow \varphi_1 \\ A_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & A \end{array}$$

este **cocartezian** dacă acesta reprezintă o sumă fibrată, adică dacă $(A, \varphi_1, \varphi_2)$ este sumă fibrată pentru (α_1, α_2) .

Definiția 27 Spunem că o categorie \mathcal{C} are **sume fibratate** dacă orice diagramă colț, de tipul (α_1, α_2) , are sumă fibrată.

Exemple de sume fibratate

Exemplul 51 Set are sume fibratate.

Soluție. Considerăm următoarea diagramă colț:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_1} & A_1 \\ f_2 \downarrow & & \\ A_2 & & \end{array}$$

și notăm cu $A_1 \overset{\circ}{\cup} A_2$ reuniunea disjunctă

$$A_1 \overset{\circ}{\cup} A_2 = (\{1\} \times A_1) \cup (\{2\} \times A_2).$$

Definim următoarea relație ρ pe $A_1 \overset{\circ}{\cup} A_2$:

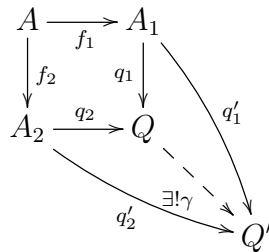
$$(1, a_1) \rho (2, a_2) \iff \exists a \in A : \begin{cases} f_1(a) = a_1 \\ f_2(a) = a_2. \end{cases}$$

$\bar{\rho}$ este cea mai mică echivalență ce conține ρ .

Fie $Q = (A_1 \overset{\circ}{\cup} A_2) / \bar{\rho}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} q_1 : A_1 \rightarrow Q \\ a_1 \rightsquigarrow \overline{(1, a_1)} \\ q_2 : A_2 \rightarrow Q \\ a_2 \rightsquigarrow \overline{(2, a_2)}. \end{array} \right. \quad \text{Obținem } q_1 f_1(a) = \overline{(1, a_1)} = \overline{(2, a_2)} = q_2 f_2(a).$$

Rezultă $q_1 f_1(a) = q_2 f_2(a)$ pentru orice $a \in A$. Obținem următoarea diagramă:



Fie $q_1' : A_1 \rightarrow Q'$, $q_2' : A_2 \rightarrow Q'$ astfel încât $q_1' f_1 = q_2' f_2$.

Definim

$$\gamma : Q \rightarrow Q' \\ \overline{(i, a_i)} \rightsquigarrow \begin{cases} q_1'(a_1) & i = 1 \\ q_2'(a_2) & i = 2. \end{cases}$$

Au loc următoarele afirmații:

1. γ este bine definit (nu depinde de reprezentanți), pentru că $q_1' f_1(a) = q_2' f_2(a)$;

$$2. \begin{cases} \gamma q_1 = q'_1 : & (\gamma q_1)(a_1) = \gamma(\overline{1, a_1}) = q'_1(a_1) \\ \gamma q_2 = q'_2 : & (\gamma q_2)(a_2) = \gamma(\overline{2, a_2}) = q'_2(a_2). \end{cases}$$

3. Unicitatea lui γ : presupunem că $\gamma' : Q \rightarrow Q'$, $\gamma' q_i = q'_i$.
Elementele lui Q au forma $\overline{(i, a_i)}$, $i = 1, 2$.

$$\begin{cases} \gamma'(\overline{1, a_1}) \stackrel{\text{def}}{=} q_1 \gamma' q_1(a_1) = q'_1(a_1) = \gamma(\overline{1, a_1}) \\ \gamma'(\overline{2, a_2}) = \gamma(\overline{2, a_2}), \end{cases} \text{ de unde } \gamma = \gamma'.$$

Prin urmare, (Q, q_1, q_2) este suma fibrată pentru diagrama colț (f_1, f_2) . ■

Exemplul 52 *Gr este cu sume fibratate.*

Soluție. Considerăm diagrama colț

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f_1} & G_1 \\ f_2 \downarrow & & \\ & & G_2 \end{array}$$

și $G_1 * G_2$ produsul liber al lui G_1 și G_2 .

Atunci $\forall x \in G_1 * G_2$, $x \neq 1$, x se scrie unic sub forma

$$x = x_1 \dots x_k, \quad x_i \in G_1 \cup G_2, \quad x_i \neq 1, \quad \forall i \in \overline{1, k}$$

și oricare doi factori consecutivi nu aparțin aceluiași grup (se numește descompunere redusă a lui x).

Fie $N \triangleleft G_1 * G_2$, $N = \langle \{f_1(y) f_2(y^{-1}) \mid y \in G\} \rangle$, unde

$$f_1(y) \in G_1, \quad f_2(y^{-1}) \in G_2, \quad \text{deci } f_1(y) f_2(y^{-1}) \in G_1 * G_2.$$

Fie $Q = G_1 * G_2 / N$ și pentru $i \in \{1, 2\}$, q_i este proiecția $\left\{ \begin{array}{l} q_i : G_i \rightarrow Q \\ x_i \rightsquigarrow x_i N \end{array} \right.$

Considerăm diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f_1} & G_1 \\ f_2 \downarrow & & \downarrow q_1 \\ G_2 & \xrightarrow{q_2} & Q \end{array}$$

Din $f_1(x)N = f_1(x)N$ (vezi definiția lui N) rezultă că $q_1 f_1 = q_2 f_2$.

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f_1} & G_1 \\ f_2 \downarrow & & \downarrow q_1 \\ G_2 & \xrightarrow{q_2} & Q \end{array} \begin{array}{l} \searrow q'_1 \\ \exists! \gamma \\ \searrow q'_2 \end{array} \rightarrow Q'$$

Fie acum $q'_1 : G_1 \rightarrow Q'$, $q'_2 : G_2 \rightarrow Q'$ astfel încât $q'_1 f_1 = q'_2 f_2$.
 Definim $\gamma : Q \rightarrow Q'$ astfel:

$$\gamma(xN) = \bar{q}(x_1) \dots \bar{q}(x_k),$$

cu

$$\bar{q} : G_1 \dot{\cup} G_2 \rightarrow Q'$$

$$\bar{q}(x_i) = \begin{cases} q'_1(x_i), & x_i \in G_1 \\ q'_2(x_i), & x_i \in G_2. \end{cases}$$

Se arată că:

1. γ nu depinde de reprezentanți;
2. $\gamma q_i = q'_i$, $i \in \{1, 2\}$;

3. unicitatea lui γ .

Deci (Q, q_1, q_2) este sumă fibrată pentru diagrama colț (f_1, f_2) . ■

Exerciții

1. Fie \mathcal{C} o categorie, următoarea diagramă colț

$$\begin{array}{ccc} & & A_1 \\ & & \downarrow \alpha_1 \\ A_2 & \xrightarrow{\alpha_1} & A \end{array}$$

și (P, β_1, β_2) produs fibrat pentru aceasta. Atunci $\{\beta_1, \beta_2\}$ este o familie monomorfică.

Soluție. Avem diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} P' & & & & \\ & \searrow^{\beta_1 \gamma_1} & & & \\ & \searrow^{\gamma_1} & & & \\ & \searrow^{\beta_2 \gamma_2} & & & \\ & & P & \xrightarrow{\beta_1} & A_1 \\ & & \downarrow \beta_2 & & \downarrow \alpha_1 \\ & & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A \end{array}$$

Să arătăm că

$$\begin{aligned} \beta_1 \gamma_1 = \beta_1 \gamma_2 & \implies \gamma_1 = \gamma_2. \\ \beta_2 \gamma_1 = \beta_2 \gamma_2 & \end{aligned}$$

Din $\alpha_1 \beta_1 \gamma_1 = \alpha_1 \beta_1 \gamma_2 = \alpha_2 \beta_2 \gamma_2$ și din definiția produsului fibrat rezultă $\gamma_1 = \gamma_2$. ■

2. Dacă (P, β_1, β_2) este produs fibrat pentru (α_1, α_2) și α_1 este monomorfism, rezultă că β_2 este monomorfism.

Soluție. Considerăm diagrama

$$B \begin{array}{c} \xrightarrow{\gamma_1} \\ \xrightarrow{\gamma_2} \end{array} P \xrightarrow{\beta_2} A_2.$$

Arătăm că

$$\beta_2\gamma_1 = \beta_2\gamma_2 \implies \gamma_1 = \gamma_2.$$

$$\begin{array}{ccccc} & & B & & \\ & & \searrow^{\gamma_1} & & \\ & & \searrow_{\gamma_2} & & \\ & & P & \xrightarrow{\beta_1} & A_1 \\ & & \downarrow_{\beta_2} & & \downarrow_{\alpha_1} \\ & & A_2 & \xrightarrow{\alpha_2} & A \end{array}$$

Avem $\alpha_2\beta_2\gamma_1 = \alpha_2\beta_2\gamma_2$, $\alpha_1\beta_1\gamma_1 = \alpha_1\beta_1\gamma_2$ și α_1 este monomorfism, de unde rezultă că

$$\begin{cases} \beta_1\gamma_1 = \beta_1\gamma_2 \\ \beta_2\gamma_1 = \beta_2\gamma_2 \end{cases} \text{ și cum } \{\beta_1, \beta_2\} \text{ este o familie monomorfică,}$$

obținem $\gamma_1 = \gamma_2$. ■

3. Unicitatea până la un izomorfism a produsului fibrat și unicitatea până la un izomorfism a sumei fibrat.

Soluție. Folosim tehnica ”vânătoarii de diagrame” sau echivalența:

$$(P, \beta_1, \beta_2) \text{ produs fibrat al lui } \{\alpha_1, \alpha_2\} \iff (P, \beta_1, \beta_2) \text{ obiect}$$

final al categoriei $\mathcal{C}_{\alpha_1, \alpha_2}$, definită astfel:

$$\text{Ob } \mathcal{C}_{\alpha_1, \alpha_2} = \left\{ (P', \beta'_1, \beta'_2) \mid P' \in \text{Ob } \mathcal{C}, P' \xrightarrow{\beta'_i} A_i, \alpha_1 \beta'_1 = \alpha_2 \beta'_2 \right\}$$

(β'_1, β'_2) fac diagrama colț (α_1, α_2) comutativă)

$$(P', \beta'_1, \beta'_2) \xrightarrow{\gamma} (P'', \beta''_1, \beta''_2) \text{ dacă } \begin{array}{l} P' \xrightarrow{\gamma} P'' \xrightarrow{\beta''_i} A_i \text{ și} \\ \beta'_i = \beta''_i \gamma, \quad i \in \{1, 2\}. \end{array}$$

Produsul de morfisme din $\mathcal{C}_{\alpha_1, \alpha_2}$ este produsul din \mathcal{C} .

Similar se raționează pentru sumă fibrată. ■

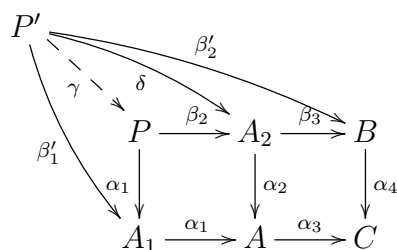
4. Dacă (P, β_1, β_2) este produs fibrat al lui (α_1, α_2) și (A_2, α_2, β_3) este produs fibrat al lui (α_3, α_4) , atunci $(P, \beta_1, \beta_3 \beta_2)$ este produs fibrat al lui $(\alpha_3 \alpha_1, \alpha_4)$.

$$\begin{array}{ccccc} P & \xrightarrow{\beta_2} & A_2 & \xrightarrow{\beta_3} & B \\ \alpha_1 \downarrow & \boxed{1} & \downarrow \alpha_2 & \boxed{2} & \downarrow \alpha_4 \\ A_1 & \xrightarrow{\alpha_1} & A & \xrightarrow{\alpha_3} & C \end{array}$$

Soluție. Din comutativitatea pătratelor, avem

$$(\alpha_3 \alpha_1) \beta_1 = \alpha_3 \alpha_2 \beta_2 = \alpha_4 (\beta_3 \beta_2).$$

Rezultă că dreptunghiul este comutativ.



Fie $\alpha_3(\alpha_1\beta'_1) = \alpha_4\beta'_2$. Din faptul că pătratul din dreapta este produs fibrat, rezultă că $\exists! \delta : P' \rightarrow A_2 : \begin{cases} \alpha_1\beta'_1 = \alpha_2\delta \\ \beta'_2 = \beta_3\delta. \end{cases}$

Folosim acum că pătratul stâng este produs fibrat și obținem că $\exists! \gamma : P' \rightarrow P : \begin{cases} \beta'_1 = \beta_1\gamma \\ \delta = \beta_2\gamma. \end{cases}$

Deci,

$$\begin{cases} \beta'_1 = \beta_1\gamma \\ \beta'_2 = (\beta_3\beta_2)\gamma. \end{cases}$$

Arătăm acum unicitatea lui γ .

Presupunem că

$$\exists \gamma' : P' \rightarrow P : \begin{cases} \beta_1\gamma = \beta_1\gamma' \\ (\beta_3\beta_2)\gamma = (\beta_3\beta_2)\gamma' \end{cases}$$

de unde $\alpha_1\beta_1\gamma = \alpha_1\beta_1\gamma'$, adică $(\alpha_2\beta_2)\gamma = (\alpha_2\beta_2)\gamma'$. Obținem $\alpha_2(\beta_2\gamma) = \alpha_2(\beta_2\gamma')$, dar $\beta_3(\beta_2\gamma) = \beta_3(\beta_2\gamma')$, iar $\{\alpha_2, \beta_3\}$ este familie monomorfică, de unde $\beta_2\gamma = \beta_2\gamma'$.

Cum $\beta_1\gamma = \beta_1\gamma'$ și $\{\beta_1, \beta_2\}$ este familie monomorfică, rezultă

$$\gamma = \gamma'.$$



Exerciții propuse

1. Să se arate că următoarele diagrame sunt carteziene în Set :

(a) Pentru $A \subseteq C$, $B \subseteq C$,

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \longrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & C \end{array}$$

(b) Pentru $f : B \rightarrow C$ și $A \subseteq C$,

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(A) & \longrightarrow & B \\ f/f^{-1}(A) \downarrow & & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

2. Dacă F este obiect final, atunci următoarele afirmații sunt echivalente:

(a) următoarea diagramă este carteziană:

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{p_A} & A \\ p_B \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & T \end{array}$$

(b) (P, p_A, p_B) este produsul lui A și B .

3. În orice categorie $A \xrightarrow{f} B$ este monomorfism dacă și numai dacă diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{1_A} & A \\ 1_A \downarrow & & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

este carteziană.

4. Pentru $A \xrightarrow{f} B$ morfism și C obiect dintr-o categorie, următoarea diagramă este carteziană.

$$\begin{array}{ccc} A \times C & \xrightarrow{\pi_A} & A \\ f \times 1_C \downarrow & & \downarrow f \\ B \times C & \xrightarrow{\pi_B} & B \end{array}$$

Capitolul 4

Egalizatori și coegalizatori

4.1 Egalizatori

Fie \mathcal{C} o categorie.

Definiția 28 Perechea (K, σ) se numește **egalizator** pentru (f, g) dacă:

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{\sigma} & X & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & Y \\ \downarrow \exists! u & & \nearrow h & & \\ T & & & & \end{array}$$

1. $f\sigma = g\sigma$;

2. $\forall T \in \text{Ob } \mathcal{C}, \forall h : T \rightarrow X$ astfel încât $fh = gh$, $\exists! u : \sigma u = h$.

Definiția 29 Spunem că o categorie **are egalizatori** dacă orice pereche de morfisme (f, g) , cu aceeași sursă și aceeași cosursă, are egalizator.

Teorema 16 σ este un monomorfism.

Într-adevăr, dacă $\sigma u_1 = \sigma u_2$, atunci din definiție rezultă $u_1 = u_2$.

Teorema 17 *Fie \mathcal{C} o categorie cu produse finite. Atunci \mathcal{C} are egalizatori dacă și numai dacă \mathcal{C} are produse fibrat.*

Demonstrație. " \implies " Considerăm diagrama colț:

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ & \downarrow g & \\ X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

Să arătăm că aceasta are produs fibrat.

$$\begin{array}{ccccc} K & & & & \\ & \searrow \sigma & & & \\ & X \times Y & \xrightarrow{p_2} & Y & \\ & \downarrow p_1 & & \downarrow g & \\ & X & \xrightarrow{f} & Z & \end{array}$$

Perechea (K, σ) este egalizator pentru (fp_1, gp_2) , așadar

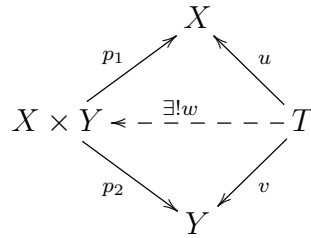
$$fp_1\sigma = gp_2\sigma.$$

Fie T și u, v astfel încât $fu = gv$.

$$\begin{array}{ccccc} T & & & & \\ & \searrow u & & & \\ & & K & \xrightarrow{p_2\sigma} & Y \\ & & \downarrow p_1\sigma & & \downarrow g \\ & & X & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

Din $(X \times Y, p_1, p_2)$ produs direct rezultă că $\exists w : T \rightarrow X \times Y$, astfel încât

$$\begin{cases} p_1 w = u \\ p_2 w = v, \end{cases} \text{ deci } fp_1 w = gp_2 w.$$



$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\sigma} & X \times Y \xrightarrow[gp_2]{fp_1} Z \\ \uparrow \exists! \gamma & \nearrow w & \\ T & & \end{array}$$

Din (K, σ) egalizator pentru (fp_1, gp_2) rezultă că $\exists \gamma : T \rightarrow K$, astfel încât

$$\sigma \gamma = w. \quad (1)$$

Verificăm că $p_2 \sigma \gamma = v$ și $p_1 \sigma \gamma = u$.

$$\begin{cases} p_1 \sigma \gamma \stackrel{(1)}{=} p_1 w = u \\ p_2 \sigma \gamma \stackrel{(1)}{=} p_2 w = v. \end{cases}$$

γ este unic pentru că $\{p_1 \sigma, p_2 \sigma\}$ este o familie monomorfică.

” \Leftarrow ” Arătăm că \mathcal{C} are egalizatori.

Fie

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \rightrightarrows \\ \xleftarrow{g} \end{array} Y$$

și considerăm produsul direct $(X \times Y, p_1, p_2)$.

Fie acum diagrama colț:

$$\begin{array}{ccc} & & Y \\ & & \downarrow u \\ X & \xrightarrow{v} & Y \times Y \end{array}$$

unde morfismele u și v se obțin astfel:

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & p_1 \nearrow & & \nwarrow 1_Y & \\ Y \times Y & \xleftarrow{\exists! u} & & \xrightarrow{\quad} & Y \\ & p_2 \searrow & & \swarrow 1_Y & \\ & & Y & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & p_1 \nearrow & & \nwarrow f & \\ Y \times Y & \xleftarrow{\exists! v} & & \xrightarrow{\quad} & X \\ & p_2 \searrow & & \swarrow g & \\ & & Y & & \end{array}$$

cu

$$\begin{cases} p_1 v = f \\ p_2 v = g \end{cases} \quad (2)$$

Din $p_i u = 1_Y$ rezultă u monomorfism. Completez diagrama colț la un produs fibrat.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{q_2} & Y \\ q_1 \downarrow & & \downarrow u \\ X & \xrightarrow{v} & Y \times Y \end{array}$$

Rezultă $uq_2 = vq_1$.

Arătăm că (A, q_1) este egalizator pentru

$$X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \rightrightarrows \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y.$$

$$A \xrightarrow{q_1} X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \rightrightarrows \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y$$

Din (2) avem:

$$\begin{cases} fq_1 = p_1vq_1 = p_1uq_2 = q_2 \\ gq_1 = p_2vq_1 = p_2uq_2 = q_2, \end{cases} \text{ deci } fq_1 = gq_1.$$

Fie acum diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{q_1} & X & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \rightrightarrows \\ \xrightarrow{g} \end{array} & Y \\ \uparrow & & \nearrow h & & \\ Z & & & & \end{array}$$

cu $fh = gh$.

Considerăm

$$\begin{array}{ccccc} & & & \xrightarrow{fh} & \\ & & & \searrow \exists! w & \\ Z & & & & Y \\ & \searrow h & & \xrightarrow{q_2} & \\ & & A & & \\ & & \downarrow q_1 & & \downarrow u \\ & & X & \xrightarrow{v} & Y \times Y \end{array}$$

și arătăm că $ufh = vh$.

Folosim faptul că $\{p_1, p_2\}$ este o familie monomorfică:

$$\begin{cases} p_1(ufh) = fh = (p_1v)h = p_1(vh) \\ p_2(ufh) = fh = gh = p_2(vh), \end{cases} \text{ de unde } ufh = vh.$$

Unicitatea lui w .

Presupunem că $q_1w = q_1w' = h$.

Arătăm că $q_2w' = fh$. Înmulțim la stânga cu v și obținem:

$$vq_1w = vq_1w'$$

$$uq_2w = uq_2w' \text{ și cum } u \text{ este monomorfism, rezultă } q_2w = q_2w'.$$

Așadar, $fh = q_2w'$, căci $q_2w = fh$.

Deci, dacă w' este astfel încât $q_1w' = h$, atunci $q_2w' = fh$ și din unicitatea lui w de la produsul fibrat, rezultă că w este unic.

Așadar, (f, g) are egalizator. ■

Exemple de egalizatori

1. Set are egalizatori.

Soluție. Fie $f, g : X \rightarrow Y$ și fie $K = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$.

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{i} & X \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} Y \\ \uparrow \exists! w & \nearrow u & \\ T & & \end{array}$$

Avem

$$\begin{cases} fi = gi \\ fu = gu \implies u(x) \in K, \forall x \in T. \end{cases}$$

Definim $w(t) = u(t)$ și obținem $iw = u$. ■

2. Gr are egalizatori.

Soluție. Fie $f, h : G \rightarrow H$ morfisme de grupuri și

$$K = \{g \in G \mid f(g) = h(g)\}.$$

Avem că $K \neq \emptyset$ deoarece $e_G \in K$.

Mai mult, K este subgrup al lui G : $g_1, g_2 \in K$ implică

$$f(g_1^{-1}g_2) = f(g_1)^{-1}f(g_2) = h(g_1)^{-1}h(g_2) = h(g_1^{-1}g_2),$$

adică $g_1^{-1}g_2 \in K$.

Dacă $u : K \rightarrow G$ este morfismul incluziune, atunci $fu = gu$.

Fie $u' : K' \rightarrow G$ morfism de grupuri, încât $fu' = gu'$.

Atunci $fu'(k') = gu'(k')$ deci $u'(K')$ este subgrup al lui K .

Considerând $i : u'(K') \rightarrow G$ morfismul incluziune și restricția $\tilde{u}' : K' \rightarrow u'(K')$ a lui u' la codomeniu, avem $u' = u(i\tilde{u}')$.

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{u} & G \xrightleftharpoons[g]{f} H \\ \uparrow & \nearrow u' & \\ K' & & \end{array}$$

■

3. Top are egalizatori.

Soluție.

Egalizatorul unei perechi de funcții continue se obține înzestrând cu topologia indusă egalizatorul din Set, corespunzător funcțiilor între mulțimile suport. ■

4.2 Coegalizatori

Fie \mathcal{C} o categorie. Noțiunea duală celei de egalizator este cea de coegalizator.

Definiția 30 Perechea (π, Q) se numește **coegalizator** pentru (f, g) dacă:

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & Y & \xrightarrow{\pi} & Q \\
 & & \downarrow u & \dashrightarrow \exists! \bar{u} & \\
 & & S & &
 \end{array}$$

1. $\pi f = \pi g$;
2. $\forall S \in \text{Ob } \mathcal{C}, \forall u : Y \rightarrow S$ astfel încât $uf = ug$, $\exists! \bar{u} : \bar{u}\pi = u$.

Definiția 31 Spunem că o categorie **are coegalizatori** dacă orice pereche de morfisme (f, g) , cu aceeași sursă și aceeași cosursă, are coegalizator.

Următoarele rezultate referitoare la coegalizatori se obțin prin dualitate din cele referitoare la egalizatori sau direct, printr-un raționament similar.

Teorema 18 π este un epimorfism.

Teorema 19 Fie \mathcal{C} o categorie cu coproduse finite. Atunci \mathcal{C} are coegalizatori dacă și numai dacă \mathcal{C} are sume fibrante.

Exemple de coegalizatori

1. Set are coegalizatori.

Soluție. Considerăm

$$\begin{array}{ccccc}
 X & \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} & Y & \xrightarrow{\pi} & Y/R \\
 & & \downarrow u & \swarrow \exists! \bar{u} & \\
 & & S & &
 \end{array}$$

unde R este cea mai mică relație de echivalență ce conține $\{(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$.

Avem succesiunea de implicații:

$$uf = ug \implies (f(x), g(x)) \in \ker u, \forall x \in X \implies R \subseteq \ker u.$$

Definim $\bar{u} : Y/R \rightarrow S$, $\bar{u}(\hat{y}) = u(y)$.

\bar{u} este bine definită. Într-adevăr,

$$\hat{y}_1 = \hat{y}_2 \implies y_1 R y_2 \stackrel{R \subseteq \ker u}{\implies} u(y_1) = u(y_2).$$

■

2. Gr și Ab au coegalizatori.

Soluție. Fie $f, g : G_1 \rightarrow G_2$ și fie

$$G_2 \xrightarrow{\pi} G_2 / \langle \{f(x)g^{-1}(x) \mid x \in G_1\} \rangle.$$

Considerăm aceeași echivalență R ca în exemplul anterior.

$$\pi f(x) = \pi g(x) \text{ pentru că } f(x) R g(x).$$

Restul verificărilor sunt similare cu cele de mai sus.

În Ab:

$$\langle \{f(x)g^{-1}(x) \mid x \in G_1\} \rangle \text{ devine } \text{Im}(f - g).$$

■

3. Top are coegalizatori

Soluție. Coegalizatorul se obține înzestrând coegalizatorul corespunzător din Set cu topologia cât. ■

4.3 Nucleu

Fie \mathcal{C} o categorie cu obiecte zero. Atunci $\forall A, B \in \text{Ob } \mathcal{C}, \exists 0_{AB} \stackrel{\text{not.}}{=} 0$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{0_{AB}} & B \\ \downarrow & \nearrow & \\ Z & & \end{array}$$

Definiția 32 Fie $A \xrightarrow{\varphi} B$ în categoria \mathcal{C} . Perechea (K, σ) se numește **nucleu** pentru φ dacă:

$$\begin{array}{ccccc} & & X & & \\ & & \downarrow u & & \\ K & \xleftarrow{\exists! v} & A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ & \xrightarrow{\sigma} & & & \end{array}$$

$$1. \varphi\sigma = 0;$$

$$2. \forall X \in \text{Ob } \mathcal{C} \text{ astfel încât } \varphi u = 0 \implies \exists! v : X \rightarrow K \text{ cu } \sigma v = u.$$

Propoziția 2 Dacă perechea (K, σ) este nucleu pentru φ , atunci σ monomorfism.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & X & & \\
 & u_2 \swarrow & \downarrow \sigma u_1 & & \\
 K & \xleftarrow{u_1} & A & \xrightarrow{f} & B \\
 & \dashrightarrow \sigma & & &
 \end{array}$$

Într-adevăr, din $\sigma u_1 = \sigma u_2$ și din definiția nucleului rezultă $u_1 = u_2$.

Observația 9 Dacă nucleul există, atunci este unic, până la izomorfism (folosim tehnica "vânătoarii de diagrame").

Definiția 33 Spunem că o categorie \mathcal{C} cu obiecte zero **are nucleu** dacă orice morfism din \mathcal{C} are nucleu.

Observația 10 Într-o categorie \mathcal{C} cu obiecte zero, nucleul unui morfism $f : A \rightarrow B$ este egalizatorul perechii $(f, 0_{AB})$.

Exemplul 53 Categoria Set. are nucleu.

Soluție. Avem $\text{Ob Set.} = \{(A, a) \mid a \in A\}$, obiectele nule au forma $(\{a\}, a)$. Morfismele au forma:

$$\begin{array}{c}
 (A, a) \xrightarrow{f} (B, b) \\
 a \rightsquigarrow b
 \end{array} ,$$

iar un morfism nul:

$$\begin{array}{ccc} (A, a) & \longrightarrow & (B, b) \\ \downarrow & \nearrow & \\ (\{b\}, b) & & \end{array}$$

duce toate elementele lui A în b .

Să determinăm nucleul unui morfism f .

$$\begin{array}{ccccc} & & (X, x) & & \\ & \swarrow & \downarrow u & & \\ (K, *) & \xrightarrow{\alpha} & (A, a) & \xrightarrow{f} & (B, b) \\ & \nwarrow \bar{u} & & & \end{array}$$

Fie

$$\begin{cases} K = f^{-1}(b) \subset A \\ * \in f^{-1}(b) \end{cases}.$$

Cum α incluziunea, rezultă că putem considera $* = a$.

Avem

$$f\alpha(k) = f(k) = b, \quad \forall k \in K, \text{ adică } f\alpha = 0.$$

Dacă $fu = 0$ atunci $u(x) \in f^{-1}(b) = K$.

Definim $\bar{u}(x) = u(x)$. ■

Observația 11 În $\text{Gr}, \text{Ab}, R\text{-mod}$, obiectul zero este 0 și atunci:

$$\begin{aligned} \ker f &= f^{-1}(0) \xrightarrow{i} A \xrightarrow{f} B \\ &= \{a \in A \mid f(a) = 0\}. \end{aligned}$$

Morfismele zero sunt morfisme nule.

Exemplul 54 *Exemplu de momomorfism, care nu este nucleu.*

Soluție. Fie $i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ incluziunea canonică în categoria monoizilor. Dacă (\mathbb{N}, i) ar fi nucleu pentru un morfism $\alpha : \mathbb{Z} \rightarrow M$, atunci $\alpha i = 0$ adică $\alpha(n) = 0$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, de unde $\alpha(-n) = -\alpha(n) = 0$.

Deci $\ker \alpha = \mathbb{Z}$ și nu \mathbb{N} , o contradicție. ■

4.4 Conuclee

Noțiunea duală celei de nucleu este cea de conucleu, în categorii cu obiecte zero. Fie \mathcal{C} o categorie cu obiecte zero.

Definiția 34 *Perechea (C, u) este **conucleu** pentru φ dacă:*

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B & \xrightarrow{u} & C \\ & & \downarrow v & \dashrightarrow \exists! w & \\ & & X & & \end{array}$$

1. $u\varphi = 0$;
2. $\forall X \in \text{Ob } \mathcal{C}, v : B \rightarrow X$ astfel încât $v\varphi = 0 \implies \exists! w : C \rightarrow X$ cu $wu = v$.

Similar ca la nucleu, au loc următoarele rezultate:

Teorema 20 *Dacă perechea (C, u) este conucleu pentru φ , atunci u este epimorfism.*

Teorema 21 *Dacă conucleul există, atunci este unic, până la izomorfism.*

Definiția 35 Spunem că o categorie \mathcal{C} cu obiecte zero **are conuclee** dacă orice morfism din \mathcal{C} are conucleu.

Observația 12 Într-o categorie \mathcal{C} cu obiecte zero, conucleul unui morfism $f : A \rightarrow B$ este coegalizatorul perechii $(f, 0_{AB})$.

Exemplul 55 Exemplu de epimorfism care nu este conucleu.

Soluție. În categoria monoizilor, morfismul $i : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ este epimorfism, dar nu este conucleu.

Într-adevăr, dacă $u, v : \mathbb{Z} \rightarrow M$ sunt astfel încât $ui = vi$, atunci $u(n) = v(n), \forall n \in \mathbb{N}$, de unde $u(-n) = v(-n)$, adică $u = v$.

Presupunând că $(\mathbb{Z}, i) = \text{coker } \alpha$, unde $\alpha : M \rightarrow \mathbb{Z}$, obținem $i\alpha = 0$, adică $\alpha = 0$ pentru care conucleul este \mathbb{N} , contradicție. ■

Exemplul 56 Ab are conuclee.

Soluție. Considerăm diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B & \xrightarrow{\pi} & B/\text{Im } \varphi \\ & & \downarrow u & \swarrow \exists! w & \\ & & X & & \end{array}$$

Din $u\varphi = 0$ rezultă $\ker \pi = \text{Im } \varphi \subset \ker u$. Definim

$$w(b + \text{Im } \varphi) = u(b),$$

care este morfism bine definit în Ab și satisface condițiile cerute. ■

Exemplul 57 *Set. are conuclee.*

Soluție. Fie diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} (A, a) & \xrightarrow{f} & (B, b) & \xrightarrow{\pi} & (B/\rho, *) \\ & & \downarrow \psi & \swarrow \eta & \\ & & (C, c) & & \end{array}$$

$$\text{unde } b_1 \rho b_2 \iff \begin{cases} b_1 = b_2 \text{ sau} \\ b_1, b_2 \in f(A). \end{cases}$$

Obținem clasele de echivalență $f(A), \widehat{b}_1, \dots, \widehat{b}_n, \dots$,
cu b_1, \dots, b_n, \dots elemente distincte din $B - f(A)$.

Considerăm $* = f(A)$. Observăm că au loc implicațiile

$$\pi(b) = * \implies \widehat{b} = * \implies b \rho f(x), \forall x \in A.$$

Din $\psi f = 0$ rezultă $\psi f(x) = c, \forall x \in A$ deci $f(A) \subset \psi^{-1}(c)$.

Definim $\eta(*) = c$ și $\forall b' \in B - f(A), \eta(\widehat{b}') = \psi(b')$. Funcția este bine definită, deoarece $\widehat{b}' = \{b'\}$. ■

Exemplul 58 *Gr are conuclee.*

Soluție. Fie $f : G \rightarrow G'$ morfism de grupuri și $N = \langle \text{Im } f \rangle_n$ închiderea normală a imaginii lui f în G' .

Atunci $(p_N, G'/N)$ este conucleul lui f , unde $p_N : G' \rightarrow G'/N$. ■

4.5 Tipuri importante de categorii

În aplicațiile categoriilor, de exemplu în algebra omologică, a apărut necesitatea introducerii unor condiții suplimentare, obținând astfel diverse tipuri de categorii.

Prezentăm aici definițiile celor mai importante tipuri de categorii, în care apar noțiunile prezentate până în acest capitol.

O categorie \mathcal{C} se numește

1. *preaditivă* dacă:

- are obiecte zero și
- $\forall X, Y \in \text{Ob } \mathcal{C}$, $\mathcal{C}(X, Y)$ este grup abelian, astfel încât $\forall g, f_1, f_2$ încât să se poată face compunerea, are loc proprietatea de distributivitate:

$$g(f_1 + f_2) = gf_1 + gf_2.$$

2. *aditivă* dacă:

- este preaditivă și
- are produse directe și coproduse.

3. *preabeliană* dacă:

- este aditivă și
- orice morfism din \mathcal{C} are nucleu și conucleu.

4. *abeliană* dacă:

- este preabeliană;
- orice epimorfism definește un conucleu al nucleului său:

$$\text{dacă } K \xrightarrow{\sigma} X \text{ are conucleu pe } X \xrightarrow{\eta} Q$$

atunci (K, σ) este nucleu pentru η .

- orice morfism definește un nucleu al conucleului său;
- orice morfism se descompune într-un morfism și un epimorfism.

Teorema 22 (Gröthendieck) *Dacă \mathcal{C} este o categorie abeliană și \mathcal{I} este o categorie mică, atunci categoria functorilor $\langle \mathcal{I}, \mathcal{C} \rangle$ de la \mathcal{I} la \mathcal{C} este o categorie abeliană.*

Sa remarcăm că în categoria functorilor de la \mathcal{C} la \mathcal{D} , unde categoria \mathcal{C} este o categorie mică, avem:

$$\text{Hom}(F, G) \leq \prod_{\text{subclasă } X \in \text{Ob } \mathcal{C}} (F(X), G(X))$$

$\alpha \in \text{Hom}(F, G)$ este un morfism functorial, $\alpha = (\alpha_X)_{X \in \text{Ob } \mathcal{C}}$.

Deoarece \mathcal{C} este o categorie mică, $\prod_{X \in \text{Ob } \mathcal{C}} (F(X), G(X))$ e mulțime, deci $\text{Hom}(F, G)$ este o mulțime.

Teorema 23 (Mitchell, Freyd) *Orice categorie abeliană mică \mathcal{I} se scufundă într-o categorie de module, adică:*

$$\exists R \text{ inel comutativ unitar și } \exists F : \mathcal{I} \rightarrow R - \text{Mod}$$

functor exact (păstrează șirurile exacte), fidel, deplin.

Capitolul 5

Limite și colimite

5.1 Limită

Una dintre noțiunile de bază din teoria categoriilor este cea de limită, noțiune ce cuprinde noțiunile de produs direct, egalizator, produs fibrat.

Definiția 36 Considerăm $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ functor covariant, \mathcal{I} o categorie mică.

Perechea $(K, (\sigma_i)_{i \in \mathcal{I}})$ este **limită** pentru F , unde $K \in \text{Ob } \mathcal{C}$ și $\sigma : k_K \rightarrow F$ morfism functorial, $\sigma_i : K \rightarrow F(i)$, $i \in \mathcal{I}$

dacă:

1. pentru orice $i \xrightarrow{u} j$, diagrama

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\sigma_i} & F(i) \\ \downarrow \sigma_j & \swarrow F(u) & \\ F(j) & & \end{array}$$

comutativă și

2. are loc proprietatea de **universalitate** : $\forall (K', (\sigma'_i)_{i \in I})$ astfel încât $F(u) \sigma'_i = \sigma'_j$, $\exists! \gamma : K' \rightarrow K$ încât diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 K & \xleftarrow{\exists! \gamma} & K' \\
 \searrow \sigma_i & & \swarrow \sigma'_i \\
 & F(i) &
 \end{array}$$

comutativă.

Propoziția 3 Dacă perechea $(K, (\sigma_i)_{i \in I})$ este o limită pentru functorul F , atunci ea este unică până la izomorfism și $(\sigma_i)_{i \in I}$ este o familie monomorfică.

5.2 Cazuri particulare

Cazurile particulare importante de limite sunt: produse directe, produse fibratate, egalizatori, nuclee, limite inverse.

5.2.1 Egalizatori

Considerăm

$$\begin{cases}
 \text{Ob } \mathcal{I} = \{i, j\} \\
 \text{Hom}(i, j) = \{u, v\}
 \end{cases}$$

Fie $\sigma : k_K \rightarrow F$ un morfism functorial, unde $K \in \text{Ob } \mathcal{C}$,
 $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ un functor covariant și diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & K & \\
 \sigma_j \swarrow & & \searrow \sigma_i \\
 F(j) & \xrightleftharpoons[F(v)]{F(u)} & F(i)
 \end{array}$$

Rezultă că $F(u) \sigma_i = F(v) \sigma_i = \sigma_j$.

Deci,

$$\begin{array}{ccccc}
 & & K' & & \\
 & \swarrow \text{---} & \downarrow \sigma'_i & & \\
 K & \xrightarrow{\sigma_i} & F(i) & \begin{array}{c} \xrightarrow{F(u)} \\ \xrightarrow{F(v)} \end{array} & F(j)
 \end{array}$$

$\exists! \gamma$

Cu alte cuvinte, obținem definiția egalizatorului pentru $(F(u), F(v))$.

5.2.2 Produse directe

Fie mulțimea $\mathcal{I} \neq \emptyset$ și $\bar{\mathcal{I}}$ categoria discretă asociată, adică:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ob } \bar{\mathcal{I}} = \mathcal{I} \\ \text{singurele morfisme sunt identitățile.} \end{array} \right.$$

Fie

$$\begin{aligned}
 F &: \bar{\mathcal{I}} \rightarrow \mathcal{C}, K \in \text{Ob } \mathcal{C} \\
 \sigma &: k_K \rightarrow F \text{ morfism functorial} \\
 K &\xrightarrow{\sigma_i} F(i), i \in \mathcal{I}.
 \end{aligned}$$

Considerăm $(K', (\sigma'_i)_{i \in \mathcal{I}})$, unde σ' morfism functorial și fie diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & F(i) & \\
 \sigma_i \nearrow & & \nwarrow \sigma'_i \\
 K & \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} & K'
 \end{array}$$

$\exists! \gamma$

În acerst caz, noțiunea de limită ne conduce la noțiunea de produs direct.

5.2.3 Produse fibratate

Fie \mathcal{I} categorie. Pentru o mulțime ordonată (\mathcal{I}, \leq) ,

$$i \leq k \text{ dacă } i \longrightarrow k.$$

Considerăm

$$F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}; i \leq k, j \leq k; K \in \text{Ob } \mathcal{C}$$

$$\sigma : k_K \rightarrow F \text{ un morfism functorial}$$

și diagramele comutative:

$$\begin{array}{ccc} & K & \\ & \swarrow & \downarrow \sigma_i \\ F(k) & \xleftarrow{F(u)} & F(i) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & K & \\ & \swarrow & \downarrow \sigma_j \\ F(k) & \xleftarrow{F(v)} & F(j) \end{array}$$

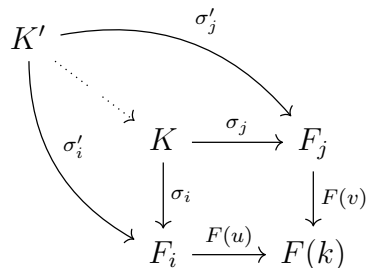
Din $\sigma_k = F(u) \sigma_i = F(v) \sigma_j$ rezultă că diagrama:

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\sigma_j} & F(j) \\ \sigma_i \downarrow & & \downarrow F(v) \\ F(i) & \xrightarrow{F(u)} & F(k) \end{array}$$

este comutativă.

Pentru alt morfism functorial σ' obținem un alt pătrat comutativ.

Remarcăm astfel că în acest caz noțiunea de limită ne conduce la cea de produs fibrat.



5.2.4 Limite inverse (proiective)

Definiția 37 Fie (\mathcal{I}, \leq) o mulțime ordonată dirijată la dreapta și fie \mathcal{I} categoria mică asociată:

$$i \longrightarrow j \iff i \leq j.$$

Un functor covariant $F : \mathcal{I}^{op} \rightarrow \mathcal{C}$ se numește un **sistem invers de obiecte**, adică este o pereche $\left((X_i)_{i \in \text{Ob}\mathcal{I}}, (f_{ij} : X_j \rightarrow X_i)_{i \leq j} \right)$, unde

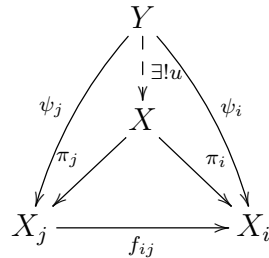
$$\text{pentru } i \leq j, \quad \begin{array}{ccc} j & \longrightarrow & X_j \\ & & \downarrow f_{ij} \\ i & \longrightarrow & X_i \end{array}$$

și

1. $\forall i, f_{ii} = 1_{X_i}$;
2. dacă $i \leq j \leq k$, atunci $X_k \xrightarrow{f_{jk}} X_j \xrightarrow{f_{ij}} X_i$, $f_{ik} = f_{ij}f_{jk}$.

Limita $(X, (\pi_i)_i)$ a functorului F se numește **limită inversă** a sistemului invers de obiecte.

Are loc proprietatea de universalitate descrisă de următoarea diagrama comutativă:



$$\exists! u : Y \rightarrow X \text{ astfel încât } \begin{cases} \psi_i = \pi_i u \\ \psi_j = \pi_j u. \end{cases}$$

Limita inversă pentru familia inversă $((X_i), (f_{ij})_{i \leq j})$ este $(X, (\pi_i)_i)$ unde $\pi_i = f_{ij} \pi_j$.

Dacă limita inversă există, atunci aceasta este unică, până la izomorfism.

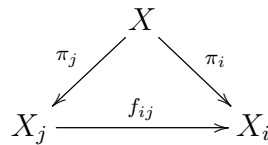
Notăție. $X = \varprojlim X_i$.

Exemple

1. Fie sistemul invers $X_1 \supset X_2 \supset \dots \supset X_n \supset \dots$, unde

$x_j \in X_j \xrightarrow{f_{ij}} x_j \in X_i$ este incluziunea, pentru $i \leq j$.

Limita inversă este $(X = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} X_i, \pi_i)$, π_i fiind incluziunea.



2. Fie șirul de funcții $X_1 \longleftarrow X_2 \longleftarrow X_3 \longleftarrow \dots$, unde $|X_1| = 1$, $|X_2| = 2$, $|X_3| = 4, \dots$. Fiecare funcție este de tipul "doi la unu", în sensul că fiecare punct din X_i are două preimagini în X_{i+1} . Limitele inverse pot fi interpretate ca fiind "drumuri infinite de preimagini".

3. Considerăm inelul întregilor p -adici $\mathbb{Z}_p = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, adică inelul elementelor de forma $\sum_{k=m \geq 0}^{\infty} a_k p^k$, $a_k \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, unde p este prim.

Acesta poate fi văzut ca limită inversă pentru functorul

$$F : \mathbb{N}^{op} \rightarrow \text{Rng}, \text{ unde } F(n) = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z},$$

iar pentru $m \leq n$,

$$\begin{array}{ccc} n & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \\ \downarrow & & \downarrow f_{mn} \\ m & \longrightarrow & \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \end{array}$$

unde $x + p^n\mathbb{Z} \rightsquigarrow x + p^m\mathbb{Z}$ este bine definit.

Obținem diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{Z}_p & \\ \pi_m \swarrow & & \searrow \pi_n \\ \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} & \xleftarrow{f_{mn}} & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \end{array}$$

unde:

$$\pi_n \left(\sum_{k=m}^{\infty} a_k p^k \right) = \sum_{k=m}^{n-1} a_k p^k + p^n\mathbb{Z}.$$

4. Fie R inel comutativ și $R[[X]]$ inelul seriilor formale.

$X^n R[X]$ este ideal în $R[X]$, iar inelul factor corespunzător este $R[X]/X^n R[X]$, unde n este număr natural fixat.

Considerăm categoria mică \mathcal{I} asociată mulțimii (\mathbb{N}, \leq) și functorul $F : \mathcal{I} \rightarrow \text{Rng}$. Obținem diagrama:

$$\begin{array}{ccc}
 & R[[X]] & \\
 \pi_m \swarrow & & \searrow \pi_n \\
 R[X]/X^m R[X] & \xleftarrow{f_{mn}} & R[X]/X^n R[X]
 \end{array}$$

unde $n \geq m$ și π_n este morfismul de inele

$$\pi_n (a_0 + \dots + a_n X^n + \dots) = a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n R[X].$$

Avem:

$$\begin{aligned}
 f_{mn} (a_0 + a_1 X + \dots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n R[X]) = \\
 a_0 + a_1 X + \dots + a_{m-1} X^{m-1} + X^m R[X],
 \end{aligned}$$

pentru $m \leq n$.

Observăm că f_{mn} este bine definit.

În acest exemplu $R[[X]] = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} R[X]/X^n R[X]$.

5.3 Colimită

Următoarea noțiune este duala noțiunii de limită.

Definiția 38 Fie \mathcal{C} o categorie, \mathcal{I} o categorie mică și $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ un functor covariant. Perechea $(L, (\sigma_i)_{i \in \text{Ob}\mathcal{I}})$ este **colimită** pentru F , unde $L \in \text{Ob}\mathcal{C}$, $\sigma : F \rightarrow k_L$ este un morfism functorial, dacă

1. pentru orice $i \xrightarrow{\alpha} j$, următoarea diagramă:

$$\begin{array}{ccc}
 & & L \\
 & \nearrow^{\sigma_i} & \uparrow^{\sigma_j} \\
 F(i) & \xrightarrow{F(\alpha)} & F(j)
 \end{array}$$

este comutativă și

2. are loc proprietatea de **universalitate**:

$$\forall (L', (\sigma'_i)_{i \in \text{Ob}\mathcal{I}}) \text{ cu } \sigma'_j F(\alpha) = \sigma'_i,$$

$$\forall i \xrightarrow{\alpha} j, \exists! \gamma : L \rightarrow L' : \sigma'_i = \gamma \sigma_i, \forall i \in \text{Ob}\mathcal{I}.$$

$$\begin{array}{ccc}
 & & F(i) \\
 & \swarrow & \downarrow \sigma_i \\
 L' & \xleftarrow{\exists! \gamma'_i} & L
 \end{array}$$

Propoziția 4 Dacă $(L, (\sigma_i)_i)$ este o colimită pentru functorul F , atunci ea este unică până la izomorfism și $(\sigma_i)_{i \in \text{Ob}\mathcal{I}}$ este o familie epimorfică.

Cazuri particulare de colimite sunt: coproduse, sume fibrante, conuclee, coegalizatori, limite inductive (directe).

Teorema 24 *i) Categoria \mathcal{C} are limite (adică pentru orice categorie mică \mathcal{I} , orice functor $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ are limită) dacă și numai dacă \mathcal{C} are produse directe și egalizatori.*

ii) Categoria \mathcal{C} are colimite (adică pentru orice categorie mică \mathcal{I} , orice functor $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ are colimită) dacă și numai dacă \mathcal{C} are coproduse și coegalizatori.

Demonstrație. " \implies " Produsele directe și egalizatorii sunt limite, așa cum am arătat mai sus.

" \impliedby " Fie $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ un functor covariant și \mathcal{I} o categorie mică nevidă, cu mulțimea de obiecte I . Fie f un morfism în categoria \mathcal{I} , cu domeniul $d(f)$ și codomeniul $r(f)$. Notăm cu

$(\prod_{i \in I} F(i), \{p_i\}_{i \in I})$ produsul direct al familiei $\{F(i)\}_{i \in I}$ și cu $(\prod_{f \in \text{Hom} \mathcal{I}} F(r(f)), \{q_i\}_{f \in \text{Hom} \mathcal{I}})$ produsul direct al familiei $\{F(r(f))\}_{f \in \text{Hom} \mathcal{I}}$.

Considerăm diagrama, corespunzătoare proprietății de universalitate a produsului direct:

$$\begin{array}{ccc}
 & F(r(f)) & \\
 p_{r(f)} \nearrow & & \nwarrow q_f \\
 \prod_{i \in I} F(i) & \xrightarrow[u]{F(f)p_{d(f)}} & \prod_{f \in \text{Hom} \mathcal{I}} F(r(f))
 \end{array}$$

și obținem morfismele unice u și v , pentru care

$$q_f u = p_{r(f)}, \text{ respectiv } q_f v = F(f)p_{d(f)}.$$

Considerăm (K, σ) un egalizator pentru u și v . Atunci $\alpha = \{\alpha_i = p_i \sigma\}$ este un morfism functorial de la functorul constant k_K la functorul F și perechea (K, α) este o limită pentru F .

Într-adevăr α este un morfism functorial: dacă $f : i \rightarrow j$ este un morfism în \mathcal{I} , cu $d(f) = i$, $r(f) = j$, atunci

$$F(f)(p_i\sigma) = (F(f)p_{d(f)})\sigma = (q_f v)\sigma = q_f(u\sigma) = p_{r(f)}\sigma = p_j\sigma.$$

Fie acum $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ și $\beta : k_X \rightarrow F$ un morfism functorial. Arătam că există un unic morfism $h : X \rightarrow K$, încât $(p_i\sigma)h = \beta_i$, pentru orice $i \in I$.

Din universalitatea produsului direct, rezultă ca există și este unic $h' : X \rightarrow \prod_{i \in I} F(i)$, încât $p_i h' = \beta_i$, pentru orice $i \in I$.

Verificăm că $uh' = vh'$.

Deoarece $\{q_f\}_{f \in \text{Hom } \mathcal{I}}$ este o familie monomorfică, este suficient ca pentru orice morfism f , să avem $q_f(uh') = q_f(vh')$. Într-adevăr,

$$q_f(uh') = p_{r(f)}h' = \beta_{r(f)} = F(f)\beta_{d(f)} =$$

$$(F(f)p_{d(f)})h' = (q_f v)h' = q_f(vh'),$$

de unde $uh' = vh'$. Din universalitatea nucleului, există morfismul unic $h : X \rightarrow K$, încât $\sigma h = h'$, deci $(p_i\sigma)h = p_i h' = \beta_i$, pentru orice $i \in I$.

Dacă $\bar{h} : X \rightarrow k$ este un morfism, încât $(p_i\sigma)\bar{h} = \beta_i$, pentru orice $i \in I$, atunci $p_i(\sigma h) = \psi_i(\sigma h')$, pentru orice $i \in I$ și cum $\{p_i\}_{i \in I}$ este o familie monomorfică, obținem $\sigma h = \sigma h'$. Apoi σ este monomorfism, deci $h = h'$.

Așadar, $(K, \{p_i\sigma\}_{i \in I})$ este o limită pentru functorul F .

Afirmația *ii*) rezultă prin dualitate. ■

5.4 Limite directe (inductive)

Definiția 39 Fie (\mathcal{I}, \leq) o mulțime ordonată dirijată la dreapta, căreia îi asociem categoria mică \mathcal{I} :

$$\begin{cases} \text{Ob } \mathcal{I} = \mathcal{I} \\ i \rightarrow j \text{ dacă } i \leq j \end{cases} .$$

Un functor covariant $F : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{C}$ este un **sistem direct**, adică este o pereche $((X_i), (f_{ij})_{i \leq j})$, unde

$$\begin{array}{ccc} i & \longrightarrow & F(i) = X_i \\ \downarrow & & \downarrow f_{ij} \\ j & \longrightarrow & F(j) = X_j \end{array}$$

încât:

1. $\forall i, f_{ii} = 1_{X_i}$;
2. $i \leq j \leq k, f_{ik} = f_{jk}f_{ij}$.

Limita directă (inductivă) $(X, (\sigma_i)_i)$ a lui F este colimita lui F , adică este colimită pentru "un sistem direct de obiecte".

Prin urmare, are loc proprietatea de universalitate:

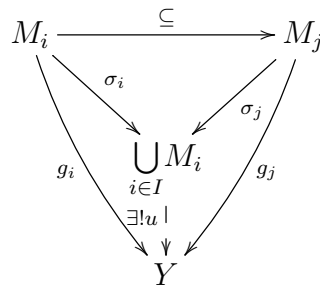
$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{f_{ij}} & X_j \\ \sigma_i \searrow & & \swarrow \sigma_j \\ & X & \\ \psi_i \searrow & \downarrow \exists! u & \swarrow \psi_j \\ & Y & \end{array}$$

unde $\sigma_i = \sigma_j f_{ij}$ și $\exists! u$ astfel încât $\begin{cases} \psi_i = u\sigma_i \\ \psi_j = u\sigma_j. \end{cases}$

Notăție. $X = \lim_{\rightarrow} X_i$.

Exemple

1. Fie $(M_i)_{i \in I}$, unde $\forall i, M_i \subseteq M, ((M_i)_i, \subseteq)$ este o mulțime ordonată. Dacă $((M_i)_i, \subseteq)$ este dirijată la dreapta, atunci limita directă este $\bigcup_{i \in I} M_i$, iar $\sigma_i : M_i \rightarrow \bigcup_{i \in I} M_i$ este incluziunea canonică; pentru $i \leq j$, σ_j prelungește σ_i .



Dacă g_j prelungește g_i , pentru $i \leq j$, atunci $\exists! u : \bigcup_{i \in I} M_i \rightarrow Y$, astfel încât $u(x_i) = g_i(x_i)$, $x_i \in M_i$ (e bine definit pentru că g_j prelungește g_i pentru $i \leq j$).

2. Fie $(X_i)_{i \in \mathcal{I}}$ o familie de obiecte din categoria Gr (respectiv Rng, Mod), unde \mathcal{I} este o mulțime ordonată, dirijată la dreapta.

Considerăm sistemul direct $\left((X_i), (f_{ij})_{i \leq j \in \mathcal{I}} \right)$ și reuniunea disjunctă $\bigsqcup_{i \in \mathcal{I}} X_i$.

Definim pe $\bigsqcup_{i \in \mathcal{I}} X_i$ următoarea echivalență \sim :

$$x_i \sim x_j \iff \begin{cases} \exists k \in \mathcal{I}, i \leq k, j \leq k : \\ f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j) \end{cases}$$

adică x_i, x_j devin "egale" într-un sistem direct.

Cu alte cuvinte, x_i este echivalent cu toate imaginile sale prin funcțiile sistem direct, adică $x_i \sim f_{ij}(x_i)$, $i \leq j$, pentru că pentru $i \leq j \leq k$ avem $f_{ik}(x_i) = f_{jk}(f_{ij}(x_i))$.

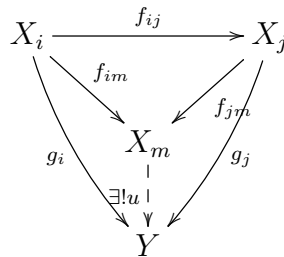
$$\lim_{\vec{i}} X_i = \bigsqcup_{i \in \mathcal{I}} (X_i) / \sim$$

unde σ_i sunt morfismele canonice $\begin{cases} \sigma_i : X_i \rightarrow X \\ x_i \rightsquigarrow \hat{x}_i \end{cases}$.

În fiecare categorie din cele menționate mai sus, operațiile pe X provin din operațiile definite pe X_i .

3. Fie (\mathcal{I}, \leq) o mulțime ordonată, dirijată la dreapta, astfel încât $\exists m = \max \mathcal{I}$. Atunci limita directă X a unui sistem direct este izomorfă cu X_m .

Într-adevăr, următoarea diagramă este comutativă din condiția sistemului direct.



Avem $g_j f_{ij} = g_i, \forall i \leq j$.

Pentru $i = m$ avem $g_m f_{im} = g_i$ de unde $g_m = u$.

Observație. Dacă $g_j = u f_{jm}$ atunci pentru $i < j$ avem

$$g_i = g_j f_{ij} = u f_{jm} f_{ij} = u f_{im}.$$

Observație. $\text{Hom} \left(\lim_{\rightarrow} X_i, Y \right) = \lim_{\leftarrow} \text{Hom} (X_i, Y)$.

Capitolul 6

Functori adjuncți

6.1 Functori adjuncți

În acest capitol, vom studia perechi de functori de tipul $\mathcal{C} \begin{matrix} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{matrix} \mathcal{D}$ care satisfac o condiție ce generalizează noțiunea de izomorfism de categorii.

Ideea de functori adjuncți a fost formulată de *Daniel Kan* în 1958 și a fost sugerată de nevoile algebrei omologice.

În cele ce urmează, vom considera doar functori covarianți.

Definiția 40 *Functorul F este **adjunct la stânga** al lui G (notat $F \dashv G$), dacă există izomorfismul natural*

$$\varphi : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-), -) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(-)).$$

Cu alte cuvinte, $F \dashv G$ dacă și numai dacă:

1. $\forall X \in \text{Ob } \mathcal{C}, \forall Y \in \text{Ob } \mathcal{D}$, există bijecția

$$\varphi_{X,Y} : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y));$$

2. $\forall X \xrightarrow{u} X'$ în \mathcal{C} , $\forall Y \xrightarrow{v} Y'$ în \mathcal{D} , următoarea diagramă este comutativă:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X'), Y) & \xrightarrow{\varphi_{X', Y}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X', G(Y)) \quad (*) \\ \downarrow H_{\mathcal{D}}(F(u), v) & & \downarrow h^B(f) \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y') & \xrightarrow{\varphi_{X, Y'}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y')). \end{array}$$

Teorema 25 Fie $F \dashv G$. Atunci

1. F păstrează colimitele (în particular, coprodusele, conucleele, sumele fibrante);
2. G păstrează limitele (în particular, produsele directe, nucleele, produsele fibrante);

Demonstrație. Fie $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ și $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$.

Verificăm doar ca G păstrează limitele, cealaltă afirmație rezultând similar. Fie $H : I \rightarrow \mathcal{D}$ un functor covariant, pentru care (A, α) este o limită. Arătăm că $(G(A), G\alpha)$ este o limită pentru $GH : I \rightarrow \mathcal{C}$.

Reamintim că $G\alpha$ este un morfism functorial de la functorul constant $k_{G(A)} : I \rightarrow \mathcal{C}$ la functorul GH , iar componenta sa de indice $i \in I$ este $G(\alpha_i) : G(A) \rightarrow G(H(i))$, unde $\alpha_i : A \rightarrow H(i)$ este componenta de indice i a functorului $\alpha : k_A \rightarrow H$.

Fie $X \in \text{Ob } \mathcal{C}$ și $\beta : k_X \rightarrow GH$ un morfism functorial. Arătăm că există un unic \mathcal{C} -morfism $f : X \rightarrow G(A)$, astfel încât

$$(1) \quad G(\alpha_i)f = \beta_i.$$

Dacă ψ este un morfism functorial de la FG la $1_{\mathcal{D}}$ și $u : i \rightarrow j$, atunci

$$\psi_{H(j)}FGH(u) = H(u)\psi_{H(i)}.$$

Pe de altă parte, β este un morfism functorial și notând

$$\gamma_i = \psi_{x,H(i)}(\beta_i) = \psi_{H(i)}F(\beta_i),$$

obținem:

$$H(u)\gamma_i = (H(u)\psi_{H(i)})F(\beta_i) = \psi_{H(j)}F(GH(u))\beta_i = \gamma_j.$$

Așadar, γ_i , $i \in I$ sunt componentele unui morfism functorial

$$\gamma : k_{F(X)} \rightarrow H$$

și conform proprietății de universalitate a perechii (A, α) , rezultă că există un unic \mathcal{D} -morfism $g : F(X) \rightarrow A$, astfel încât pentru orice $i \in I$, avem

$$\alpha_i g = \gamma_i.$$

Din faptul că $F \dashv G$, rezultă

$$G(\alpha_i)f = G(\alpha_i g)\varphi_X = G(\gamma_i)\varphi_X = G(\psi_{H(i)})(GF(\beta_i)\varphi_X) =$$

$$G(\psi_{H(i)})(\varphi_{GH(i)}\beta_i) = 1_{GH(i)}\beta_i = \beta_i,$$

adică formula (1) are loc. Din unicitatea lui g rezultă unicitatea lui f . Într-adevăr, avem $\alpha_i\psi_{X,A}(f) = \gamma_i$, $i \in I$, iar din proprietatea de universalitate a perechii (A, α) rezultă $\psi_{X,A}(f) = g$, apoi folosim injectivitatea lui $\psi_{X,A}$.

Scriem

$$F(\varinjlim H(i)) = \varinjlim FH(i),$$

respectiv

$$G(\varprojlim H(i)) = \varprojlim GH(i).$$

■

Exemplul 59 *Se verifică ușor că $F \dashv F^{-1}$ pentru F izomorfism.*

$$\varphi_{X,Y} : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F^{-1}(Y))$$

$$\alpha \rightsquigarrow F^{-1}(\alpha)$$

$$\text{cu inversa } \psi_{X,Y} : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, F^{-1}(Y)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y)$$

$$\beta \rightsquigarrow F(\beta).$$

Exerciții

1. Arătați că: $Abel \dashv U$, unde $U : Ab \rightarrow Gr$ este functorul incluziune.

Soluție. Reamintim că $F = Abel : Gr \rightarrow Ab$.

Avem:

$$\text{Hom}_{Ab}(G/D(G), A) \xrightarrow{\varphi_{G,A} \text{ bij.}} \text{Hom}_{Gr}(G, U(A) = A)$$

$$\alpha \rightsquigarrow \alpha \circ \pi$$

$$G \xrightarrow{\pi} G/D(G) \xrightarrow{\alpha} A$$

Invers, morfismului $G \xrightarrow{\beta} A$

$$\text{îi asociem } G/D(G) \xrightarrow{\beta'} A, \beta'(xD(G)) = \beta(x).$$

β' este bine definit:

$$\left. \begin{aligned} xD(G) = yD(G) &\iff y^{-1}x \in D(G) \\ G/\ker \beta \simeq \text{Im } \beta \leq A &\implies D(G) \subseteq \ker \beta \end{aligned} \right\} \implies \\ \implies y^{-1}x \in \ker \beta \implies \beta(x) = \beta(y).$$

În plus, se verifică faptul că diagrama (*) este comutativă. ■

2. Arătați $G_\ell \dashv U$, unde $U : \text{Gr} \rightarrow \text{Set}$ este functor de uitare, iar $G_\ell : \text{Set} \rightarrow \text{Gr}$ este definit de diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & G_\ell(X) \\ f \downarrow & & \downarrow \bar{f} \\ Y & \longrightarrow & G_\ell(Y) \end{array}$$

unde $G_\ell(X)$ este grupul liber de suport X (generat de $X \cup X^{-1}$, X fiind o mulțime de simboluri), iar \bar{f} prelungește f .

Soluție.

Mai întâi, sa menționăm un exemplu de grup liber: $(\mathbb{Z}, +)$ este liber, $\mathbb{Z} = G_\ell(\{1\})$. Orice grup liber e infinit.

Elementul neutru în $G_\ell(X)$ este *cuvântul vid*.

Considerăm

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{G_\ell}(G_\ell(X), G) &\xrightarrow{\varphi_{X,G} \text{ bij.}} \text{Hom}_{\text{Set}}(X, G) \\ \alpha &\rightsquigarrow \alpha/X, \end{aligned}$$

$\varphi_{X,G}$ este bijectivă pentru că α este unic determinat de α/X .

Mai mult, diagrama (*) este comutativă. ■

3. Fie M un R -modul. Atunci

$$M \otimes_R - \dashv \text{Hom}_R(M, -) = h^M,$$

unde $M \otimes_R -$ este functorul produs tensorial și h^M este functorul Yoneda.

Soluție. Considerăm

$$F = M \otimes_R - : \text{Mod}_R \rightarrow \text{Ab}, \quad R \text{ inel comutativ}$$

$$G = \text{Hom}_R(M, -) : \text{Ab} \rightarrow \text{Mod}_R$$

unde $G(A) = \text{Hom}_R(M, A)$. Fie

$$\text{Hom}_{\text{mod}_R}(M \otimes_R X, Y) \xrightarrow{\varphi_{X,Y}} \text{Hom}_{\text{mod}_R}(X, \text{Hom}_R(M, Y))$$

$$f : M \otimes_R X \rightarrow Y$$

$$m \otimes x \rightsquigarrow f(m \otimes x) \in Y$$

$$f \xrightarrow{\varphi_{X,Y}} \bar{f}, \text{ unde}$$

$$\bar{f} : X \rightarrow \text{Hom}_R(M, Y)$$

$$x \rightsquigarrow \bar{f}_x : M \rightarrow Y$$

$$\bar{f}_x(m) = f(m \otimes x).$$

Atunci $\varphi_{X,Y}$ bijectivă și diagrama (*) este comutativă. ■

4. Fie A o mulțime. Arătați că $A \times - \dashv h^A$.

Soluție. Considerăm $A \times - : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$, definit de diagrama:

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & A \times B \\ \alpha \downarrow & & \downarrow 1_A \times \alpha \\ C & \longrightarrow & A \times C \end{array}$$

Fie $h^A : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$, definit de diagrama:

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & h^A(B) \\ \alpha \downarrow & & \downarrow h^A(\alpha) \\ C & \longrightarrow & h^A(C) \end{array}$$

și considerăm:

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\text{Set}}(A \times B, C) &\xrightarrow{\varphi_{B,C} \text{ bij.}} \text{Hom}_{\text{Set}}(B, h^A(C)) \\ \left\{ \begin{array}{l} f : A \times B \rightarrow C \\ (a, b) \rightsquigarrow f(a, b) \in C \end{array} \right. &\rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} \bar{f} : B \rightarrow h^A(C) \\ b \rightsquigarrow \bar{f}(b) = \bar{f}_b \end{array} \right. \\ &\text{unde } \bar{f}_b : A \rightarrow C \\ &\bar{f}_b(a) = f(a, b). \end{aligned}$$

Diagrama (*) este comutativă. ■

Observația 13 *Se menține rezultatul de mai sus înlocuind Set cu Mod_R .*

Observația 14 *Există un izomorfism natural între functorii $M \otimes_R -$ și $M \times -$, deoarece ambii sunt adjuncți la stânga ai functorului $\text{Hom}_R(M, -)$.*

Capitolul 7

Algebre universale

7.1 Noțiunea de algebră universală

Algebrele universale au fost introduse în 1933 de Birkhoff.

Definiția 41 Fie A o mulțime, $n \in \mathbb{N}$. $\omega : A^n \rightarrow A$ se numește **operație n -ară** în A , iar n este tipul (aritatea) lui ω . Dacă $\omega : B \subsetneq A^n \rightarrow A$, atunci ω este **operație n -ară parțială** în A .

Exemplul 60 1. **Operație nulară:** $\omega : A^\circ = \{\emptyset\} \rightarrow A$,

ω este determinat de $\omega(\emptyset) \in A$.

De exemplu, $1, 0$ sunt operații nulare în \mathbb{R} .

2. **Operație unară:** $\omega : A \rightarrow A$.

De exemplu,

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x;$$

este operație unară, iar

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^{-1}$$

este operație unară parțială.

3. **Operație binară:** $\omega : A^2 \rightarrow A$.

De exemplu, $+$, \cdot sunt operații binare, iar $:$ este o operație binară parțială în \mathbb{R} .

Unei operații n -are ω , i se asociază o relație $(n + 1)$ -ară:

$$\{(a_1, \dots, a_n, \omega(a_1, \dots, a_n)) \in A^{n+1} \mid \forall i, a_i \in A\}.$$

Definiția 42 Fie A o mulțime suport și Ω o mulțime de operații în A . Atunci (A, Ω) se numește **algebră universală**.

Dacă Ω conține și operații parțiale, atunci (A, Ω) este o **algebră universală parțială**.

Observația 15 Mulțimile sunt algebre universale cu $\Omega = \emptyset$.

Tipul algebrei.

Fie (A, Ω) o algebră universală, $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ se numește *tipul algebrei*, unde $\tau(\omega)$ este tipul lui ω .

Exemple de algebre universale: $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap, C)$, grupoizi, inele, module.

Definiția 43 Spunem că (A, Ω) este **similară** cu (A', Ω') , dacă $\exists \theta : \Omega \rightarrow \Omega'$ operație de similaritate, astfel încât diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{\theta} & \Omega' \\ & \searrow \tau & \swarrow \tau' \\ & \mathbb{N} & \end{array}$$

este diagramă comutativă, adică $\tau'\theta = \tau$.

Relația de similaritate este o preordine. Dacă θ este surjectivă, atunci $\forall \omega \in \Omega$, ω și $\theta(\omega)$ au același tip.

Subalgebră

Definiția 44 Fie (A, Ω) o algebră universală de tipul τ . $B \subseteq A$ se numește **subalgebră** a algebrei (A, Ω) dacă:

$$\forall \omega \in \Omega, \forall (a_1, \dots, a_{\tau(\omega)}) \in B^{\tau(\omega)}, \omega(a_1, \dots, a_{\tau(\omega)}) \in B.$$

Notăție. $B \leq A$.

Fie $S(A, \Omega)$ mulțimea subalgebrelor algebrei (A, Ω) .

Avem $\emptyset \in S(A, \Omega)$, doar dacă Ω nu are operație nulară, altfel constantele ar trebui să aparțină lui \emptyset .

Avem $A \in S(A, \Omega)$.

Exemplul 61 1. Fie $N \subseteq M$. Atunci $\mathcal{P}(N)$ este subalgebră a lui $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap)$.

$\mathcal{P}(N)$ nu este subalgebră a lui $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap, C)$.

2. Fie $(\mathcal{F}(M), \circ)$ algebra universală a funcțiilor de la M la M . Mulțimea aplicațiilor surjective, injective, respectiv bijective, sunt subalgebre ale lui $(\mathcal{F}(M), \circ)$.

7.2 Produs direct de algebre universale

Produsul direct de algebre universale se face pe componente.

Fie $(A_1, \Omega), (A_2, \Omega)$ algebre universale de tipul τ .

Definim pe $A_1 \times A_2$ operațiile:

$$\omega \left((a_1^1, a_1^2), \dots, (a_{\tau(\omega)}^1, a_{\tau(\omega)}^2) \right) = \left(\omega \left(a_1^1, \dots, a_{\tau(\omega)}^1 \right), \omega \left(a_1^2, \dots, a_{\tau(\omega)}^2 \right) \right) \quad (**)$$

Rezultă că pentru $i = 1, 2$, $p_i : A_1 \times A_2 \rightarrow A_i$ este morfism surjectiv.

Într-adevăr, verificăm pentru $i = 1$

$$\begin{aligned} & p_1 \left(\omega \left((a_1^1, a_1^2), \dots, (a_{\tau(\omega)}^1, a_{\tau(\omega)}^2) \right) \right) \stackrel{(**)}{=} \\ &= p_1 \left(\omega \left(a_1^1, \dots, a_{\tau(\omega)}^1 \right), \omega \left(a_1^2, \dots, a_{\tau(\omega)}^2 \right) \right) = \\ &= \omega \left(a_1^1, \dots, a_{\tau(\omega)}^1 \right) = \omega \left(p_1 \left(a_1^1, a_1^2 \right), \dots, p_1 \left(a_{\tau(\omega)}^1, a_{\tau(\omega)}^2 \right) \right). \end{aligned}$$

Generalizare

Fie $\{(A_i, \Omega)\}_{i \in I}$ o familie de Ω -algebre și fie produsul cartezian $\prod_{i \in I} A_i$.

Definim pe $\prod_{i \in I} A_i$ o structură de Ω -algebră astfel:

$$\begin{aligned} & \omega \left((a_i^i)_{i \in I}, \dots, (a_{\tau(\omega)}^i)_{i \in I} \right) = \left(\omega \left(a_1^i, \dots, a_{\tau(\omega)}^i \right) \right)_{i \in I} \\ & p_j : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_j \text{ morfism surjectiv cu} \\ & p_j \left((a_i)_{i \in I} \right) = a_j, \forall j \in I. \end{aligned}$$

Definiția 45 Spunem că $\left(\prod_{i \in I} A_i, \Omega \right)$ este **produs direct** al familiei de algebre universale $\{(A_i, \Omega)\}_{i \in I}$.

Propunem următorul

Exercițiu. Să se evidentieze proprietatea de universalitate a produsului direct.

- Laticile: algebre cu două operații binare. O latice completă implică operații infinite, deci nu este o algebră în sensul dat.
- Câmpurile: algebre parțiale ${}^{-1} : K \setminus \{0\} \rightarrow K$. Ar putea deveni algebre, dacă vom considera $\theta : K \rightarrow K$ operație unară, $\theta(k) = \begin{cases} k^{-1}, & k \neq 0 \\ 0, & k = 0. \end{cases}$ Atunci ecuația $\theta(x)x = 1$ are soluție doar pentru $x \neq 0$.

7.3 θ -morfisme

Definiția 46 Fie (A, Ω) o algebră universală θ -similară cu (A', Ω') și $f : A \rightarrow A'$.

f se numește θ -morfism dacă $\forall \omega \in \Omega, \forall (a_1, \dots, a_{\tau(\omega)}) \in A^{\tau(\omega)}$

$$f(\omega(a_1, \dots, a_{\tau(\omega)})) = \theta(\omega)(f(a_1), \dots, f(a_{\tau(\omega)})), \text{ adică } (*)$$

$$f\omega = \theta(\omega) f^{\tau(\omega)}, \forall \omega \in \Omega.$$

Observația 16 1. Dacă θ -morfismul f este surjectiv, atunci (A', Ω') este o imagine θ -omomorfă a lui (A, Ω) .

2. Dacă θ, f sunt bijective, atunci f este θ -izomorfism și f^{-1} este θ^{-1} -izomorfism. (A, Ω) și (A', Ω') se numesc θ -izomorfe.

3. Dacă ω este nulară, iar $a_0 \in A$ este element pus în evidență de ω și $a'_0 \in A'$ este element pus în evidență de $\theta(\omega)$, atunci $f(a_0) = a'_0$.

4. Dacă $\theta : \Omega \rightarrow \Omega', \theta' : \Omega \rightarrow \Omega'$ sunt aplicații de similaritate între (A, Ω) și (A', Ω') , atunci pot exista aplicații f care sunt θ -morfisme, dar nu sunt θ' -morfisme.

De exemplu, $1_{\mathbb{Z}} : (\mathbb{Z}, +, \cdot) \rightarrow (\mathbb{Z}, +, \cdot)$ este 1_{Ω} -morfism, dar nu este θ -morfism, unde $\theta(+)=\cdot$ și $\theta(\cdot)=+$.

5. Dacă $f : (A, \Omega) \rightarrow (A', \Omega')$ este θ -morfism și $B \leq A$, atunci f/B este θ -morfism.

6. Dacă $B \leq (A, \Omega)$, atunci $i : B \rightarrow A$
 $x \rightsquigarrow x$ este 1_{Ω} -morfism.

În cele ce urmează, considerăm $\theta(\omega) = \omega$ și $\Omega' = \Omega$.

Definiția 47 Dacă $(A, \Omega), (A', \Omega)$ sunt algebre universale de tipul τ , atunci $f : A \rightarrow A'$ este morfism dacă $\forall \omega \in \Omega$,

$$\forall a_1, \dots, a_{\tau(\omega)} \in A, f(\omega(a_1, \dots, a_{\tau(\omega)})) = \omega(f(a_1), \dots, f(a_{\tau(\omega)})).$$

Exerciții

1. Fie $(A, \Omega), (B, \Omega)$ algebre universale de tipul τ , $f : A \rightarrow B$ o aplicație. Atunci f este morfism dacă și numai dacă

$$G_f \leq (A \times B, \Omega), \text{ unde } G_f = \{(a, f(a)) \mid a \in A\}.$$

Soluție. " \implies " Fie $(a_1, b_1), \dots, (a_{\tau(\omega)}, b_{\tau(\omega)}) \in G_f$.

Din f morfism rezultă că

$$f(\omega(a_1, \dots, a_{\tau(\omega)})) = \omega(f(a_1), \dots, f(a_{\tau(\omega)})) =$$

$$= \omega(b_1, \dots, b_{\tau(\omega)}), \text{ adică}$$

$$(\omega(a_1, \dots, a_{\tau(\omega)}), \omega(b_1, \dots, b_{\tau(\omega)})) \in G_f \text{ de unde}$$

$$G_f \leq A \times B.$$

” \Leftarrow ” Avem

$(\omega(a_1, \dots, a_{\tau(\omega)}), \omega(f(a_1), \dots, f(a_{\tau(\omega)}))) \in G_f$, de unde

$\omega(f(a_1), \dots, f(a_{\tau(\omega)})) = f(\omega(a_1, \dots, a_{\tau(\omega)}))$, deci

f este un morfism. ■

2. Fie $(A, \Omega), (B, \Omega), (C, \Omega)$ algebre universale de tipul τ și fie $A' \leq (A, \Omega), \phi \leq (A \times B, \Omega), \psi \leq (B \times C, \Omega)$.

Atunci

- (a) $\phi(A') \leq (B, \Omega)$;
- (b) $\phi^{-1} \leq (B \times A, \Omega)$;
- (c) $\psi \circ \phi \leq (A \times C, \Omega)$.

Soluție.

- (a) Fie $\omega \in \Omega, b_i \in \phi(A'), \forall i = \overline{1, \tau(\omega)}$.

Rezultă că $\exists a_i \in A' : (a_i, b_i) \in \phi$ și cum $A' \leq A$ obținem

$\omega(a_1, \dots, a_{\tau(\omega)}) \in A'$.

Avem șirul de implicații:

$$\left. \begin{array}{l} (a_i, b_i) \in \phi \\ \phi \leq A \times B \end{array} \right\} \implies$$

$$\implies (\omega(a_1, \dots, a_{\tau(\omega)}), \omega(b_1, \dots, b_{\tau(\omega)})) \in \phi \implies$$

$$\implies \omega(b_1, \dots, b_{\tau(\omega)}) \in \phi(A').$$

Deci, $\phi(A') \leq B$.

- (b) Fie $\omega \in \Omega$, $(b_i, a_i) \in \phi^{-1}$, $i = \overline{1, \tau(\omega)}$ adică $(a_i, b_i) \in \phi$.
Cum $\phi \leq A \times B$ rezultă

$$(\omega(a_1, \dots, a_{\tau(\omega)}), \omega(b_1, \dots, b_{\tau(\omega)})) \in \phi, \text{ de unde}$$

$$(\omega(b_1, \dots, b_{\tau(\omega)}), \omega(a_1, \dots, a_{\tau(\omega)})) \in \phi^{-1}.$$

Deci, $\phi^{-1} \leq (B \times A, \Omega)$.

- (c) Fie $\omega \in \Omega$, $(a_i, c_i) \in \psi \circ \phi$, $i = \overline{1, \tau(\omega)}$. Rezultă că $\exists b_i$ astfel încât $(a_i, b_i) \in \phi$, $(b_i, c_i) \in \psi$ și din $\phi \leq A \times B$, $\psi \leq B \times C$, obținem

$$\left. \begin{array}{l} (\omega(a_1, \dots, a_{\tau(\omega)}), \omega(b_1, \dots, b_{\tau(\omega)})) \in \phi \\ (\omega(b_1, \dots, b_{\tau(\omega)}), \omega(c_1, \dots, c_{\tau(\omega)})) \in \psi \end{array} \right\} \text{ de unde}$$

$$(\omega(a_1, \dots, a_{\tau(\omega)}), \omega(c_1, \dots, c_{\tau(\omega)})) \in \psi \circ \phi,$$

deci $\psi \circ \phi \leq (A \times C, \Omega)$.

Consecințe: Au loc implicațiile:

- i. $\left. \begin{array}{l} f : A \rightarrow B \text{ morfism} \\ (A', \Omega) \leq (A, \Omega) \end{array} \right\} \implies f(A') \leq (B, \Omega);$
- ii. $\left. \begin{array}{l} f : A \rightarrow B \text{ morfism} \\ (B', \Omega) \leq (B, \Omega) \end{array} \right\} \implies f^{-1}(B') \leq (A, \Omega);$
- iii. $\left. \begin{array}{l} f : A \rightarrow B \text{ morfism} \\ g : B \rightarrow C \text{ morfism} \end{array} \right\} \implies gf : A \rightarrow C \text{ morfism.}$

3. Fie (A, Ω) algebră universală de tip τ , ρ o relație de echivalență

pe A . Are loc echivalența:

$$\begin{aligned} \rho \leq (A^2, \Omega) &\iff \\ &\iff [\forall \omega \in \Omega, \forall a_i \rho b_i \implies \omega(a_1, \dots, a_{\tau(\omega)}) \rho \omega(b_1, \dots, b_{\tau(\omega)})], \\ &\text{adică } \rho \text{ este o congruență.} \end{aligned}$$

Soluție. " \implies " Fie $\omega \in \Omega, i = \overline{1, \tau(\omega)}, a_i \rho b_i$. Din $\rho \leq A^2$ rezultă $\omega(a_1, \dots, a_{\tau(\omega)}) \rho \omega(b_1, \dots, b_{\tau(\omega)})$.

Deci, ρ este o congruență.

" \impliedby " Fie $\omega \in \Omega, (a_i, b_i) \in \rho, \forall i = \overline{1, \tau(\omega)}$. Rezultă $\omega(a_1, \dots, a_{\tau(\omega)}) \rho \omega(b_1, \dots, b_{\tau(\omega)})$ adică $\rho \leq (A^2, \Omega)$.

■

4. Fie (A, Ω) algebră universală, $B \leq A$ și $B' \stackrel{\theta}{\simeq} B$. Atunci $\exists!$ (A', Ω) algebră universală astfel încât

$$\begin{cases} A' \simeq A \\ B' \leq A' \end{cases}$$

adică $\exists \bar{\theta} : A' \xrightarrow{\sim} A$ astfel încât $\bar{\theta}/B' = \theta$.

Soluție. Presupunem că $A \cap B' = \phi$, altfel luăm în loc de A pe $A \times \{u\}$, cu $\{u\}$ ales convenabil.

Fie $A' = B' \cup (A \setminus B)$. Definim

$$\bar{\theta} : A' \rightarrow A$$

$$a' \rightsquigarrow \theta(a') \in B \text{ pentru } a' \in B'$$

$$a' \rightsquigarrow a' \text{ pentru } a' \in A \setminus B.$$

Avem B' subalgebră în A' și există o unică structură de algebră universală pe A' astfel încât $\bar{\theta}$ să fie izomorfism. ■

5. Interpretarea congruențelor în cazul grupurilor și al inelelor.

Soluție. Congruențele sunt relații de echivalență regulate pe grupuri (pe inele) și ele sunt în corespondență bijectivă cu divizorii normali (respectiv, cu idealele).

$$\left\{ \begin{array}{l} q \text{ congruență pe } G \text{ implică } q(1) \triangleleft G, \\ \text{unde } (G, \cdot) \text{ grup și } q(1) \text{ este clasa elementului neutru.} \\ \text{Invers, din } N \triangleleft G \text{ obținem relația de echivalență regulată} \\ q, \text{ definită astfel: } xqy \iff x^{-1}y \in N. \end{array} \right.$$

Similar,

$$\left\{ \begin{array}{l} q \text{ congruență pe } (R, +, \cdot) \text{ implică } q(0) \text{ ideal în } R, \\ \text{unde } q(0) \text{ este clasa lui } 0. \\ \text{Invers, din } I \text{ ideal în } R \text{ obținem relația de echivalență regulată} \\ q, \text{ definită astfel: } xqy \iff x - y \in I. \end{array} \right.$$

■

7.4 Congruențe

Definiția 48 Fie (A, Ω) o algebră universală de tip τ , ρ o echivalență pe A . ρ este **congruență** pe (A, Ω) dacă:

$$\forall \omega \in \Omega, \forall a_1, \dots, a_{\tau(\omega)}, b_1, \dots, b_{\tau(\omega)} \in A, \quad (*)$$

$$a_i \rho b_i, i = \overline{1, \tau(\omega)} \text{ implică } \omega(a_1, \dots, a_{\tau(\omega)}) \rho \omega(b_1, \dots, b_{\tau(\omega)})$$

Notăție. $E(A)$: mulțimea relațiilor de echivalență pe A ;

$C(A, \Omega)$: mulțimea congruențelor pe (A, Ω) .

Avem $\{\Delta_A, A^2\} \subset C(A, \Omega)$.

Definiția 49 Spunem că (A, Ω) este *simplă* dacă

$$C(A, \Omega) = \{\Delta_A, A^2\}.$$

Exemplul 62 Fie $f : A \rightarrow B$ morfism de algebre universale.

Atunci $\ker f$ este congruență pe A .

Soluție. Avem $a \ker f b \iff f(a) = f(b)$.

Observăm că $\ker f = G_f^{-1} \circ G_f$ pentru că

$$\begin{cases} (a, c) \in G_f^{-1} \circ G_f \iff \exists b : (a, b) \in G_f, (b, c) \in G_f^{-1} \\ (a, c) \in \ker f \iff f(a) = f(c) \end{cases} \iff$$

$b = f(a) = f(c)$. Conform exercițiului anterior, are loc șirul de implicații:

f morfism $\iff G_f \leq A \times B \implies G_f^{-1} \leq B \times A \implies G_f^{-1} \circ G_f = \ker f \leq A \times A = A^2$, adică $\ker f$ este o congruență. ■

7.5 Algebră factor

Teorema 26 Fie $\rho \in C(A, \Omega)$. Atunci $\exists! (A/\rho, \Omega)$ astfel încât $p_\rho : A \rightarrow A/\rho$ morfism.

Demonstrație. Fie $\omega \in \Omega$.

Definim următoarea operație pe A/ρ :

$$\forall \rho(x_1), \dots, \rho(x_{\tau(\omega)}) \in A/\rho,$$

$$\omega(\rho(x_1), \dots, \rho(x_{\tau(\omega)})) = \rho(\omega(x_1, \dots, x_{\tau(\omega)})).$$

Buna definire:

Fie $\rho(x'_i) = \rho(x_i), \forall i = \overline{1, \tau(\omega)}$ adică $x_i \rho x'_i, \forall i = \overline{1, \tau(\omega)}$, de unde

$$\omega(x_1, \dots, x_{\tau(\omega)}) \rho \omega(x'_1, \dots, x'_{\tau(\omega)}) \text{ deci}$$

$$\rho(\omega(x'_1, \dots, x'_{\tau(\omega)})) = \rho(\omega(x_1, \dots, x_{\tau(\omega)})).$$

Arătăm că p_ρ este morfism.

$\forall \omega, \forall x_1, \dots, x_{\tau(\omega)} \in A :$

$$\begin{aligned} p_\rho(\omega(x_1, \dots, x_{\tau(\omega)})) &\stackrel{\text{def. } p_\rho}{=} \rho(\omega(x_1, \dots, x_{\tau(\omega)})) \\ &\stackrel{\text{def. } \omega \text{ pe } A/\rho}{=} \omega(\rho(x_1), \dots, \rho(x_{\tau(\omega)})) \\ &= \omega(p_\rho(x_1), \dots, p_\rho(x_{\tau(\omega)})). \end{aligned}$$

Unicitatea lui ω :

Fie ω' o altă operație pe A/ρ astfel încât

$$p_\rho(\omega(x_1, \dots, x_{\tau(\omega)})) = \omega'(p_\rho(x_1), \dots, p_\rho(x_{\tau(\omega)})).$$

Rezultă că $\forall \rho(x_i) \in A/\rho$ avem:

$$\begin{aligned} \omega(\rho(x_1), \dots, \rho(x_{\tau(\omega)})) &= \omega(p_\rho(x_1), \dots, p_\rho(x_{\tau(\omega)})) = \\ &= p_\rho(\omega(x_1, \dots, x_{\tau(\omega)})) = \omega'(\rho(x_1), \dots, \rho(x_{\tau(\omega)})), \text{ de unde} \\ &\omega = \omega'. \end{aligned}$$

■

Consecință. Orice congruență este nucleul unui morfism ($\rho = \ker p_\rho$).

$$\begin{cases} (A/\rho, \Omega) \text{ se numește } \textit{algebră cât} , \text{ iar} \\ p_\rho \text{ morfism natural (canonic).} \end{cases}$$

Observația 17 Avem $A/\Delta_A \simeq A$, iar A/A^2 este o Ω -algebră formată dintr-un singur element.

Teorema 27 Fie $f : A \rightarrow B$ morfism de algebre universale, ρ o congruență pe A astfel încât $\rho \subseteq \ker f$.

Atunci $\exists! \bar{f} : A/\rho \rightarrow B$ morfism, astfel încât $\bar{f}p_\rho = f$. În plus,

$$\begin{aligned} f \text{ surjectiv} &\implies \bar{f} \text{ surjectiv;} \\ \rho = \ker f &\implies \bar{f} \text{ injectiv.} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow p_\rho & \nearrow \bar{f} \\ & A_\rho & \end{array}$$

Demonstrație. Definim $\bar{f}(\rho(x)) = f(x)$. \bar{f} este bine definit din $\rho \subseteq \ker f$.

Arătăm că \bar{f} este morfism. Fie $\omega \in \Omega$ și

$\rho(x_1), \dots, \rho(x_{\tau(\omega)}) \in A/\rho$. Avem șirul de implicații:

$$\begin{aligned} \bar{f}(\omega(\rho(x_1), \dots, \rho(x_{\tau(\omega)}))) &\stackrel{A/\rho \text{ alg.}}{=} \bar{f}(\rho(\omega(x_1, \dots, x_{\tau(\omega)}))) \\ &\stackrel{\text{def. } \bar{f}}{=} f(\omega(x_1, \dots, x_{\tau(\omega)})) \stackrel{f \text{ morf.}}{=} \omega(f(x_1), \dots, f(x_{\tau(\omega)})) \\ &\stackrel{\text{def. } \bar{f}}{=} \bar{f}(\omega(\bar{f}(\rho(x_1)), \dots, \bar{f}(\rho(x_{\tau(\omega)})))) \implies \bar{f} \text{ morfism.} \end{aligned}$$

Unicitatea lui \bar{f} :

Presupunem că

$$\bar{f}p_\rho = f = \bar{f}p_\rho \text{ de unde } \bar{f}(\rho(x)) = \bar{f}(\rho(x)) = f(x) \text{ deci } \bar{f} = \bar{f}.$$

Injectivitatea lui \bar{f} pentru $\rho = \ker f$ rezultă din șirul de implicații:

$$\bar{f}(\rho(x)) = \bar{f}(\rho(y)) \implies f(x) = f(y) \implies \left. \begin{array}{l} x(\ker f)y \\ \ker f = \rho \end{array} \right\} \implies$$

$$\implies \rho(x) = \rho(y) \implies \bar{f} \text{ injectiv.}$$

■

Teorema 28 Fie $(A, \Omega), (B, \Omega), (C, \Omega)$ algebre universale și considerăm diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow g & & \nearrow \exists h \\ C & & \end{array}$$

cu $\ker g \subseteq \ker f$.

Atunci

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists h \text{ morfism} : hg = f; \\ f \text{ surjectiv} \implies h \text{ surjectiv}; \\ \ker g = \ker f \implies h \text{ injectiv}. \end{array} \right.$$

Demonstrație. Fie diagrama:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow g & \searrow p_{\ker g} & \downarrow \bar{f} \\ C & \xleftarrow{\exists \bar{g}} & A/\ker g \end{array}$$

Din teorema anterioară, $\exists \bar{g}, \exists \bar{f}$ morfisme, astfel încât

$$\begin{cases} \bar{g}p_{\ker g} = g \\ \bar{f}p_{\ker g} = f. \end{cases}$$

Cum g surjectiv, rezultă \bar{g} bijectiv, deci există \bar{g}^{-1} morfism, pentru care

$$p_{\ker g} = \bar{g}^{-1}g \text{ de unde } f = \bar{f}\bar{g}^{-1}g.$$

În plus, din f surjectiv rezultă \bar{f} surjectiv și cum $\bar{f}\bar{g}^{-1} = h$ obținem h surjectiv.

Din $\ker f = \ker g$ rezultă \bar{f} injectiv, deci h este injectiv. ■

Teorema 29 (Teorema duală). Fie $(A, \Omega), (B, \Omega), (C, \Omega)$ algebre universale și considerăm diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{f} & B \\ r \downarrow & & \nearrow \exists h \\ C & & \end{array}$$

unde $f(B) \subseteq g(C)$, g injectivă. Atunci există h morfism : $gh = f$.

Demonstrație. Din g injectiv rezultă că $\exists r : A \rightarrow C : rg = 1_C$; r retractă a lui g .

Fie $h = rf$. Arăt că h este morfism.

$$\begin{aligned} g(C) &\leq (A, \Omega) \\ g_1 : C &\rightarrow g(C) \text{ izomorfism} \\ g_1(c) &= g(c) \\ \forall a \in g(C), r(a) &= g_1^{-1}(a). \end{aligned}$$

Din $f(B) \subseteq g(C)$ rezultă că $\forall b \in B, h(b) = (rf)(b) =$

$r(f(b)) = g_1^{-1}(f(b)) = (g_1^{-1}f)(b)$ deci h este morfism (h morfism pentru că $r/\text{Im } g$ este morfism).

Arătăm că $h = rf$ implică $gh = g rf = f$. Avem:

$$(g rf)(b) = g r(f(b)) = gg_1^{-1}(f(b)) = f(b) \text{ de unde } g rf = f.$$

7.6 Teoreme de izomorfism

Teorema 30 (Teorema 1 de izomorfism) Dacă $f : (A, \Omega) \rightarrow (B, \Omega)$ este un morfism, atunci $\exists \bar{f} : A/\ker f \rightarrow f(A)$ izomorfism astfel încât următoarea diagramă este comutativă:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ p_{\ker f} \downarrow & & \uparrow i \\ A/\ker f & \xrightarrow{\bar{f}} & f(A) \end{array}$$

Demonstrație. Avem $A/\ker f = \{\hat{a} \mid a \in A\}$.

Considerăm graficul $G_f = F$.

Avem $\ker f = F^{-1} \circ F$ și $F^{-1}F(a) = F^{-1}(f(a)) = f^{-1}(f(a))$.

Deci, $A/\ker f = \{f^{-1}(y) \mid y \in f(A)\}$. Definim

$$\bar{f} : A/\ker f \rightarrow f(A) \\ f^{-1}(y) \rightsquigarrow y, \text{ care este bijectivă.}$$

Arătăm că \bar{f} morfism.

Fie $\omega \in \Omega$, $f^{-1}(y_1), \dots, f^{-1}(y_{\tau(\omega)}) \in A/\ker f$.

Atunci

$$\begin{aligned} \bar{f}(\omega(f^{-1}(y_1), \dots, f^{-1}(y_{\tau(\omega)}))) & \stackrel{A/\ker f \text{ algebră}}{=} \\ & = \bar{f}(f^{-1}(\omega(y_1, \dots, y_{\tau(\omega)}))) \stackrel{\text{def. } \bar{f}}{=} \end{aligned}$$

$$= \omega (y_1, \dots, y_{\tau(\omega)}) \stackrel{\text{def. } \bar{f}}{=} \omega (\bar{f}(f^{-1}(y_1)), \dots, \bar{f}(f^{-1}(y_{\tau(\omega)}))) .$$

■

Teorema 31 (Teorema 2 de izomorfism) Fie $A_1 \leq (A, \Omega)$ și $\rho \in C(A, \Omega)$ o congruență. Au loc afirmațiile:

1. $\rho(A_1) \leq (A, \Omega)$;
2. $\rho_1 = \rho \cap A_1^2 \leq C(A, \Omega)$;
3. $\rho' = \rho \cap [\rho(A_1)]^2 \in C(\rho(A_1), \Omega)$

și $(A_1)/\rho_1 \simeq \rho(A_1)/\rho'$, adică $(A_1)/(\rho \cap A_1^2) \simeq \rho(A_1)/(\rho \cap A_1^2)$.

Demonstrație.

1. Avem șirul de implicații:

$$\rho \in C(A, \Omega) \implies \left. \begin{array}{l} \rho \leq (A^2, \Omega) \\ A_1 \leq (A, \Omega) \end{array} \right\} \implies \rho(A_1) \leq (A, \Omega).$$

2. $\rho_1 = \ker(p_\rho/A_1)$ este o congruență.

$$\begin{aligned} p_\rho &: A \rightarrow A/\rho \\ p_\rho/A_1 &: A_1 \rightarrow A/\rho \\ \rho_1 &= \ker(p_\rho/A_1) = \rho \cap A_1^2 \end{aligned}$$

3. Din Teorema 1 de izomorfism rezultă că

$$\begin{aligned} A_1/\ker(p_\rho/A_1) (= A_1/\rho_1) &\simeq \text{Im}(p_\rho/A_1) = \{\hat{x} \mid x \in A_1\} = \\ &= \{\hat{y} \mid y \in \rho(A_1)\}, \text{ deoarece } x\rho y \iff \hat{x} = \hat{y}. \end{aligned}$$

Deci, $A_1/\rho_1 \simeq \rho(A_1)/\rho'$. ■

Să vedem cum se transcrie acest rezultat în cazul grupurilor.

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 \leq A \\ (A, \Omega) \text{ algebră universală} \end{array} \right\} \rightsquigarrow \left\{ \begin{array}{l} S \leq G \\ (G, \cdot) \text{ grup} \end{array} \right\}.$$

ρ congruență pe $(A, \Omega) \rightsquigarrow N = \widehat{0} \triangleleft G$.

Conform celei de-a doua teoreme de izomorfism la algebre universale,

$$A_1/(\rho \cap A_1^2) \simeq \rho(A_1)/\rho \cap [\rho(A_1)]^2.$$

Avem $\rho(A_1) = \{a \in G \mid \exists a_1 \in S : a_1 \rho a\}$.

Mai mult,

$$\begin{aligned} a_1 \rho a &\iff e \rho a_1^{-1} a \iff \\ &\iff [a_1^{-1} a \in N \iff a \in a_1 N]. \end{aligned}$$

$\rho(A_1) \rightsquigarrow \rho(S) = \{a \mid \exists a_1 \in S : a \in a_1 N\} = SN$.

$\rho \cap A_1^2 \rightsquigarrow \{(a_1, a_2) \in S^2 \mid a_1 \rho a_2\} =$

$= \{(a_1, a_2) \in S^2 \mid a_1^{-1} a_2 \rho e \iff a_1^{-1} a_2 \in N\} \rightsquigarrow N \cap S$.

Deci, $A_1/(\rho \cap A_1^2) \rightsquigarrow S/N \cap S$.

Pe de altă parte,

$\rho \cap [\rho(A_1)]^2 \rightsquigarrow N \cap NS = N$, ($N = Ne \subset NS$).

Deci, $\rho(A_1)/\rho \cap [\rho(A_1)]^2 \rightsquigarrow NS/N$.

Așadar a doua teoremă de izomorfism la grupuri devine:

Teorema 32 *Dacă G este grup și $S \leq G$, $N \triangleleft G$, atunci*

$$NS/N \simeq S/N \cap S.$$



Teorema 33 (Teorema dublei factorizări). Dacă $q, \rho \in C(A, \Omega)$, $q \subseteq \rho$, atunci $(A/\rho)/(\rho/q) \simeq A/\rho$.

Demonstrație. Considerăm diagrama:

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{p_q} & A/q & \xrightarrow{p_{\rho/q}} & (A/q)/(\rho/q) \\
 & \searrow p_\rho & \downarrow \exists! g & & \swarrow \exists g' \\
 & & A/\rho & &
 \end{array}$$

cu $q \subseteq \rho$. Atunci $\exists! g$ morfism : $gp_q = p_\rho$.

Dar, $\rho/q = \ker g$ de unde $\rho/q \in C(A/q, \Omega)$.

Aplicăm Teorema 1 pentru g și rezultă că $(A/q)/\ker g \simeq A/\rho$.

Deci, $(A/q)/(\rho/q) \simeq A/\rho$. ■

Translații

$\omega \in \Omega(n)$ determină operația n -ară:

$$(x_1, \dots, x_n) \longrightarrow \omega(x_1, \dots, x_n).$$

Fixăm toate argumentele, cu excepția unuia:

$$\begin{aligned}
 \tau : A &\rightarrow A \\
 x &\rightsquigarrow \omega(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_i, \dots, a_{n-1})
 \end{aligned}$$

a_j fixate, $\forall j \neq i$.

Spunem că τ este o *translație elementară*.

Definiția 50 θ se numește **translație** dacă $\theta = 1_A$ sau θ este produs de un număr finit de translații elementare.

Exerciții

1. Fie (A, Ω) algebră universală și $\rho_1, \rho_2 \in C(A, \Omega)$.

Atunci $\rho_1\rho_2 \in C(A, \Omega) \iff \rho_1\rho_2 = \rho_2\rho_1$.

Soluție. " \Leftarrow " Dacă R_1, R_2 echivalente pe A , atunci

$$R_1R_2 \text{ echivalență} \iff R_1R_2 = R_2R_1. (*)$$

Deci, $\rho_1\rho_2$ este o echivalență pe A .

În plus, avem implicațiile:

$$\left. \begin{array}{l} \rho_1 \in C(A, \Omega) \iff \rho_1 \leq (A^2, \Omega) \\ \rho_2 \in C(A, \Omega) \iff \rho_2 \leq (A^2, \Omega) \end{array} \right\} \implies \\ \implies \rho_1\rho_2 \leq (A^2, \Omega) \implies \rho_1\rho_2 \in C(A, \Omega).$$

" \Leftarrow " Din $\rho_1\rho_2$ congruență rezultă $\rho_1\rho_2$ echivalență, deci, conform cu (*), $\rho_1\rho_2 = \rho_2\rho_1$.

Demonstrația pentru ():*

" \implies " R_1R_2 echivalență implică $(R_1R_2)^{-1} = R_1R_2$, de unde $R_2^{-1}R_1^{-1} = R_1R_2$ deci $R_2R_1 = R_1R_2$.

" \Leftarrow " Avem $R_1R_2 = R_2R_1$ și implicațiile:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_A \subseteq R_1, \Delta_A \subseteq R_2 \implies \Delta_A \subseteq R_1R_2; \\ R_1^{-1} = R_1, R_2^{-1} = R_2 \implies (R_1R_2)^{-1} = R_2R_1 \stackrel{\text{ip.}}{=} R_1R_2 \\ \implies R_1R_2 \text{ simetrică}; \\ R_1^2 = R_1, R_2^2 = R_2 \implies (R_1R_2)^2 \stackrel{\text{ip.}}{=} R_1^2R_2^2 = R_1R_2 \\ \implies R_1R_2 \text{ tranzitivă.} \end{array} \right.$$

Deci, $R_1 R_2$ este o echivalență. ■

2. Dacă $\rho_1, \rho_2 \in C(A, \Omega)$, $\rho_1 \rho_2 = \rho_2 \rho_1$ atunci

$$\sup_{C(A, \Omega)} \{\rho_1, \rho_2\} = \rho_1 \rho_2.$$

Similar,

$$\rho_1, \rho_2 \in E(A), \rho_1 \rho_2 = \rho_2 \rho_1 \text{ implică } \sup_{E(A)} \{\rho_1, \rho_2\} = \rho_1 \rho_2.$$

Soluție. Din $\rho_1 \subseteq \rho_1, \Delta_A \subseteq \rho_2$ rezultă $\rho_1 \subseteq \rho_1 \rho_2$ și analog $\rho_2 \subseteq \rho_1 \rho_2$.

Deci, $\rho_1 \rho_2$ este majorant în $C(A, \Omega)$ pentru $\{\rho_1, \rho_2\}$.

Fie $q \in C(A, \Omega)$, $\rho_1 \subseteq q$ și $\rho_2 \subseteq q$.

Atunci $\rho_1 \rho_2 \subseteq q^2 = q$.

Deci, $\sup_{C(A, \Omega)} \{\rho_1, \rho_2\} = \rho_1 \rho_2$. ■

3. Fie (A, Ω) algebră universală, astfel încât $\forall \rho_1, \rho_2 \in C(A, \Omega)$, $\rho_1 \rho_2 = \rho_2 \rho_1$ (pentru a fi congruență).

Să se arate că:

$$\forall \rho_1, \rho_2, \rho_3 \in C(A, \Omega) \text{ și } \rho_1 \subseteq \rho_3 : \rho_1 (\rho_2 \cap \rho_3) \supseteq (\rho_1 \rho_2) \cap \rho_3.$$

(condiția de modularitate).

Soluție. Din $(a, b) \in (\rho_1 \rho_2) \cap \rho_3$ rezultă $(a, b) \in \rho_1 \rho_2$ și $(a, b) \in \rho_3$ deci $\exists c \in A : (a, c) \in \rho_2, (c, b) \in \rho_1, (a, b) \in \rho_3$.

Din $\rho_1 \subseteq \rho_3$ rezultă $(c, b) \in \rho_3$, $(a, b) \in \rho_3$ deci $(a, c) \in \rho_3$.

Dar, $(a, c) \in \rho_2$, deci rezultă $(a, c) \in \rho_2 \cap \rho_3$.

Avem și $(c, b) \in \rho_1$, deci $(a, b) \in \rho_1 (\rho_2 \cap \rho_3)$. ■

4. Fie q echivalență pe (A, Ω) . Atunci

q congruență $\iff q$ admite toate translațiile.

Soluție. " \implies " Verificăm că q admite toate translațiile elementare și prin inducție rezultă că admite toate translațiile. Altfel spus, dacă

$$\tau : x \longrightarrow \omega(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_i, \dots, a_{n-1})$$

este o translație elementară, atunci verificăm că

$$(a, b) \in q \implies (\tau(a), \tau(b)) \in q, \forall a, b \in A.$$

Din $(a, b) \in q$ și q congruență, rezultă

$$\omega(a_1, \dots, a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_n) q \omega(a_1, \dots, a_{i-1}, b, a_{i+1}, \dots, a_n),$$

de unde $\tau(a) q \tau(b)$, deci $(\tau(a), \tau(b)) \in q$.

" \impliedby " Presupunem că q admite toate translațiile elementare și fie $a_i, a'_i \in A$ astfel încât $a_i q a'_i, \forall i = \overline{1, n}$.

Atunci,

$$\tau_1(a_1) = \omega(a_1, a_2, \dots, a_n) q \omega(a'_1, a_2, \dots, a_n) = \tau_1(a'_1)$$

$$\tau_2(a_2) = \omega(a'_1, a_2, \dots, a_n) q \omega(a'_1, a'_2, \dots, a_n) = \tau_2(a'_2)$$

...

$$\tau_n(a_n) = \omega(a'_1, \dots, a'_{n-1}, a_n) q \omega(a'_1, a'_2, \dots, a'_n) = \tau_n(a'_n)$$

Obținem $\omega(a_1, a_2, \dots, a_n) q \omega(a'_1, a'_2, \dots, a'_n), \forall \omega \in \Omega(n)$, deci q este o congruență. ■

5. Fie (A, Ω) algebră universală.

Dacă $\forall a, b \in A, \exists$ o translație pe A , care schimbă pe a cu b , atunci congruențele comută pe A .

Soluție. Fie $q_1, q_2 \in C(A, \Omega)$ și fie $(a, b) \in q_2 q_1$ deci $\exists c \in A : (a, c) \in q_1$ și $(c, b) \in q_2$.

Din ipoteză, există o translație care schimbă pe a cu b .

Conform problemei precedente, q_i admit $\tau, i = 1, 2$. Avem

$$\left\{ \begin{array}{l} (a, c) \in q_1 \text{ deci } (\tau(a), \tau(c)) \in q_1 \text{ de unde} \\ (b, \tau(c)) \in q_1 \text{ adică } (\tau(c), b) \in q_1; \\ (c, b) \in q_2 \text{ deci } (\tau(c), \tau(c)) \in q_2 \text{ de unde} \\ (\tau(c), a) \in q_2 \text{ adică } (a, \tau(c)) \in q_2. \end{array} \right.$$

Rezultă $(a, b) \in q_1 q_2$.

Deci, $q_2 q_1 \subseteq q_1 q_2$ și similar obținem cealaltă incluziune.

Așadar, $q_1 q_2 = q_2 q_1$. ■

Capitolul 8

Latici. Clase de latici

8.1 Latici

Vom arăta că mulțimea subalgebrelor unei algebre universale, cât și mulțimea congruențelor sale au structură de latică, de aceea dedicăm acest capitol noțiunii de latică.

Noțiunea a fost introdusă de Charles Pierce, Ernst Schröder și, independent, de Richard Dedekind.

Definiția 51 *O mulțime ordonată (L, \leq) în care*

$$\forall x_1, x_2 \in L, \exists x_1 \vee x_2 = \sup(x_1, x_2), \exists x_1 \wedge x_2 = \inf(x_1, x_2)$$

*se numește **latică**.*

Astfel, o latică (L, \vee, \wedge) este o algebră universală.

Teorema 34 *Dacă (L, \leq) este o latică, atunci au loc proprietățile următoare:*

$\forall a, b, c \in L,$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{asociativitatea:} \\ \text{comutativitatea:} \\ \text{absorbția:} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c; \\ a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c. \\ a \vee b = b \vee a; \\ a \wedge b = b \wedge a. \end{array} \right.$$

$$a \vee (a \wedge b) = a \wedge (a \vee b) = a.$$

Demonstrație.

1. Fie $x = a \vee (b \vee c)$ și $y = (a \vee b) \vee c$. Obținem

$$a \leq x, b \vee c \leq x \text{ de unde } a \leq x, b \leq x, c \leq x.$$

Dar $a \vee b \leq x$ implică $y \leq x$.

Similar $x \leq y$, deci avem egalitate.

2. Comutativitatea rezultă din definiția lui sup și inf.

3. Fie $w = a \vee (a \wedge b)$. Rezultă $a \leq w$.

Din $a \leq a$ și $a \wedge b \leq a$ obținem $a \vee (a \wedge b) \leq a$ deci $w \leq a$.

Avem deci $a = w$.

Pentru a obține celelalte egalități, permutăm " \vee " cu " \wedge ", iar " \leq " cu " \geq ".

■

Teorema 35 (Reciprocă). Fie (L, \vee, \wedge) o algebră cu proprietățile de asociativitate, comutativitate și absorbție. Definim " \leq " pe L :

$$a \leq b \iff a \vee b = b.$$

Atunci, ” \leq ” este o relație de ordine, iar (L, \leq) este o latice, în care:

$$\begin{aligned} a \wedge b &= \inf(a, b); \\ a \vee b &= \sup(a, b). \end{aligned}$$

Demonstrație. Observăm că

1. $a \vee b = b \iff a \wedge b = a$ pentru că, din $a \vee b = b$ rezultă

$$a = a \wedge (a \vee b) = a \wedge b.$$

2. $a \vee a = a = a \wedge a, \forall a \in L$, pentru că din $a = a \wedge (a \vee a)$ rezultă

$$a \vee a = a \vee [a \wedge (a \vee a)] = a \text{ deci } a \vee a = a.$$

Folosim prima observație și obținem $a \wedge a = a$.

Așadar, ” \leq ” e reflexivă.

Tranzitivitatea.

Fie $a \leq b$ și $b \leq c$. Rezultă $a \vee b = b$ și $b \vee c = c$.

Atunci

$$a \vee c = a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = b \vee c = c \text{ deci } a \leq c.$$

Antisimetria.

Fie $a \leq b$ și $b \leq a$ de unde $a \vee b = b$ și $b \vee a = a$.

Din comutativitatea lui ” \vee ” rezultă că $a = b$.

Așadar, ” \leq ” este relație de ordine.

Să verificăm

$$\begin{cases} a \vee b = \sup(a, b); \\ a \wedge b = \inf(a, b). \end{cases}$$

(folosim " \leq ")

Din $a \vee (a \vee b) = (a \vee a) \vee b = a \vee b$ de unde $a \leq a \vee b$.

Prin simetrie, $b \leq a \vee b$.

Deci, $a \vee b$ este majorant pentru a și b .

Fie acum $a \leq c$ și $b \leq c$. Obținem $a \vee c = c$ și $b \vee c = c$, de unde

$$c \vee c = c = (a \vee b) \vee c \text{ deci } a \vee b \leq c.$$

Rezultă $a \vee b = \sup(a, b)$. Conform cu observația 1, $a \leq b \iff a \wedge b = a$.

În demonstrația anterioară, înlocuim " \leq " cu " \geq " și " \vee " cu " \wedge " și obținem $a \wedge b = \inf(a, b)$. ■

Observația 18 *Din simetria proprietăților operațiilor " \vee " și " \wedge " rezultă că dacă într-o teoremă schimbăm între ele relațiile " \leq " și " \geq " și operațiile " \vee " și " \wedge ", atunci se obține duala teoremei.*

8.1.1 Sublatici. Morfisme

Definiția 52 *Fie (L, \vee, \wedge) o latice și $L' \subseteq L$. Spunem că L' este o **sublatice** a lui L , dacă*

$$\forall a, b \in L', \quad a \vee b, a \wedge b \in L'.$$

Exemplul 63 1. **Idealele** unei latici:

Fie (L, \vee, \wedge) o latice, $I \subseteq L$.

$$I \text{ ideal dacă: } \begin{cases} 1) \forall x, y \in I, x \vee y \in I; \\ 2) \forall x \in I, t \leq x \implies t \in I. \end{cases}$$

$I(x) = \{t \in L \mid t \leq x\}$ se numește *ideal principal*.

Idealul principal I se mai notează $]\leftarrow, a]$ cu $a \in L$.

2. Noțiunea duală se numește **filtru**. Așadar,

$$F \text{ filtru dacă: } \begin{cases} 1) \forall x, y \in I, x \wedge y \in I; \\ 2) \forall x \in I, t \geq x \implies t \in I. \end{cases}$$

3. $\forall a, b \in L, a \leq b$, intervalul $[a, b] = \{x \in L \mid a \leq x \leq b\}$.

Definiția 53 Fie $f : L_1 \rightarrow L_2$ cu L_1, L_2 latici. f se numește **morfism de latici** dacă $\forall a, b \in L_1$,

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b),$$

$$f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b).$$

f se numește **izomorfism de latici** dacă este morfism bijectiv de latici.

Observația 19 Orice morfism de latici este morfism de ordine.

Demonstrație.

Are loc șirul de implicații:

$$a \leq b \implies b = a \vee b \implies f(b) = f(a) \vee f(b) \implies f(a) \leq f(b). \quad \blacksquare$$

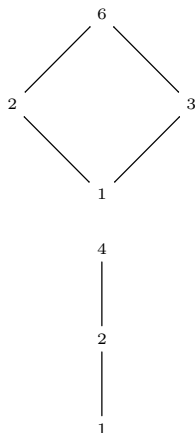
Reciproca este falsă, așa cum rezultă din următoarele exemple:

Exemplul 64 Notăm cu D_n laticea divizorilor numărului natural nenul n . Definim $f : D_6 \rightarrow D_4$ astfel:

$$f(1) = 1, \quad f(2) = f(3) = 2, \quad f(6) = 4.$$

Atunci f este un morfism de ordine, dar nu este morfism de latici.

Într-adevăr, $1 = f(1) = f(2 \wedge 3) \neq f(2) \wedge f(3) = 2$.



Exemplul 65 Fie $L_1 = \{a, b, c, d\}$

\wedge	a	b	c	d
a	a	a	a	a
b	a	b	a	b
c	a	a	c	d
d	a	b	c	d

\vee	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	b	d	d
c	c	d	c	d
d	d	d	d	d

și $L_2 = \{e, f\}$

\wedge	e	f
e	e	e
f	e	f

\vee	e	f
e	e	f
f	f	f

Definim $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ astfel:

$$\begin{cases} \varphi(a) = \varphi(b) = \varphi(c) = e \\ \varphi(d) = f \end{cases}$$

φ este morfism de ordine, dar nu este morfism de latici:

$$\varphi(b \vee c) = \varphi(d) = f \neq \varphi(b) \vee \varphi(c) = e.$$

Teorema 36 f izomorfism de ordine dacă și numai dacă f izomorfism de latici.

Demonstrație. Reamintim că un izomorfism de ordine este o bijecție f , așa încât f și f^{-1} sunt morfisme de ordine. În baza observației anterioare, este suficient să arătăm că dacă f este izomorfism de ordine, atunci este și izomorfism de latici.

Fie $f : L_1 \rightarrow L_2$ și $a, b \in L_1$. Avem $a \leq a \vee b$, $b \leq a \vee b$, de unde $f(a) \leq f(a \vee b)$, $f(b) \leq f(a \vee b)$. Fie acum $c' \in L_2$, astfel încât $f(a) \leq c'$, $f(b) \leq c'$. Deoarece f este bijectivă rezultă că există $c \in L_1$ încât $f(c) = c'$. Din faptul că f^{-1} este morfism de ordine rezultă $a \leq c$, $b \leq c$, deci $a \vee b \leq c$ de unde $f(a \vee b) \leq f(c) = c'$.

Deci $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$. Prin dualitate, se obține $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$. Împreună cu condiția de bijectivitate, rezultă că f este un izomorfism de latici. ■

Exerciții

1. Menționați care dintre diagramele de mai jos reprezintă latici.

Soluție.

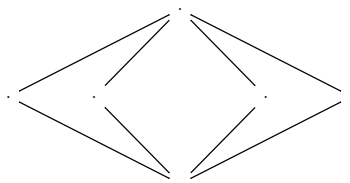


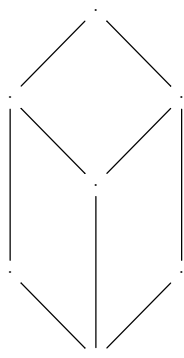
Diagrama de mai sus reprezintă o latică.



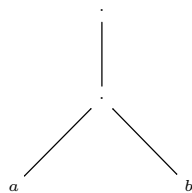
Diagrama de mai sus nu este latică, este doar o mulțime ordonată ($\nexists \text{sup}(a, b)$). ■

2. Menționați dacă mulțimile parțial ordonate, reprezentate prin diagramele de mai jos sunt latici.

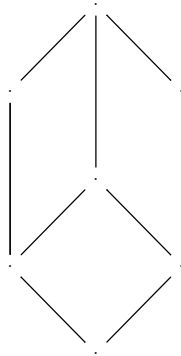
Soluție.



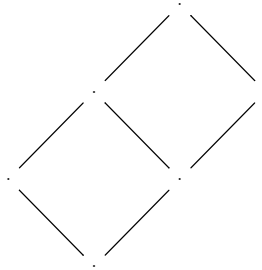
Da



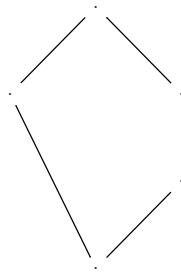
Nu, deoarece $\nexists \text{inf}(a, b)$.



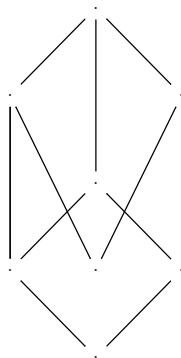
Da



Da



Da



Nu.

■

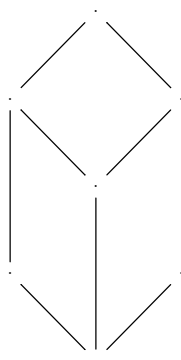
Definiția 54 Fie $f : L \rightarrow L'$ o funcție bijectivă între două latici, astfel încât

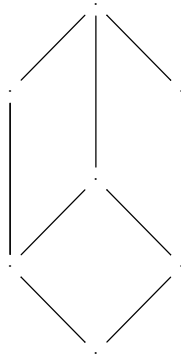
$$\begin{cases} f(a \wedge b) = f(a) \vee f(b) \\ f(a \vee b) = f(a) \wedge f(b), \forall a, b \in L, \end{cases}$$

f se numește **antiizomorfism**.

3. Care dintre laticile de mai sus sunt antiizomorfe?

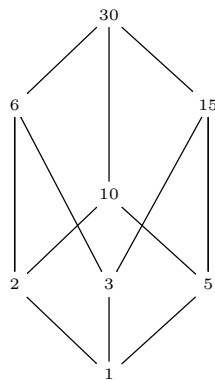
Soluție. Sunt antiizomorfe următoarele latici:

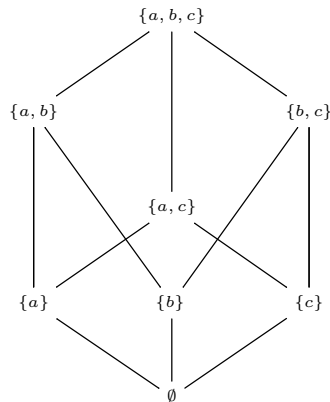




4. Confrunțați laticia divizorilor lui 30 cu laticia submulțimilor lui $\{a, b, c\}$.

Soluție.



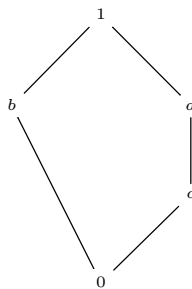


Laticile de mai sus sunt izomorfe.

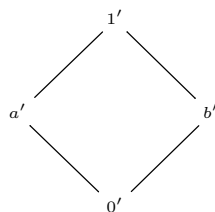


5. Arătați că există un epimorfism de ordine de la L_1 la L_2 , latici descrise de diagramele:

L_1 :



L_2 :

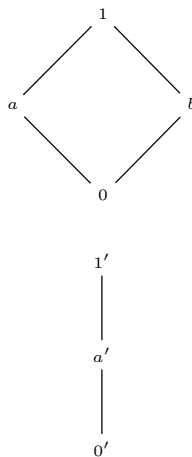


Soluție.

$$\text{Fie } f : L_1 \rightarrow L_2, \begin{cases} f(0) = 0' \\ f(1) = 1 \\ f(a) = f(c) = a' \\ f(b) = b'. \end{cases}$$

Avem $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$, deci f este un epimorfism de ordine. ■

6. Arătați că nu există un epimorfism de latici între următoarele latici:

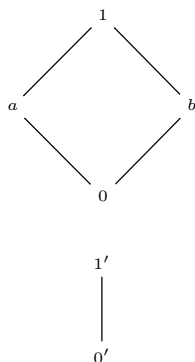


Dacă ar exista un epimorfism f , am avea

$$f(a) = f(b) = a' \text{ de unde}$$

$$f(a \vee b) = f(1) = 1' \neq f(a) \vee f(b) = a'. \quad \blacksquare$$

7. Determinați un morfism între următoarele latici:



Soluție. Dacă am considera $\begin{cases} f(0) = f(a) = f(b) = 0' \\ f(1) = 1' \end{cases}$
am avea $f(a \vee b) \neq f(a) \vee f(b) = 0'$, ceea ce contrazice
faptul că f este morfism.

Deci, $f(1) = 0$ sau $f(1) = f(a) = f(b) = f(0) = 1'$. ■

8. Orice element maximal dintr-o latice este maxim. (Orice element minimal dintr-o latice este minim).

Soluție. Fie m maximal în L și $x \in L$, arbitrar.

Avem $m \vee x \geq m$, m maximal, de unde $m \vee x = m$ deci $x \leq m$, $\forall x$, adică m este maxim. ■

9. Fie $\{I_k\}_k$ un lanț de ideale din L . Atunci $I = \bigcup_k I_k$ ideal.

Soluție. Fie $x, y \in I$ deci $\exists k_1, k_2 : x \in I_{k_1}, y \in I_{k_2}$.

Cum $\{I_k\}_k$ este lanț, rezultă $I_{k_1} \subseteq I_{k_2}$ sau invers.

Presupunem că $I_{k_1} \subseteq I_{k_2}$.

Avem $x, y \in I_{k_2}$ deci $x \vee y \in I_{k_2} \subset I$.

Fie $x \in I$ și $y \leq x$. Rezultă $\exists k : x \in I_k$, deci $y \in I_k \subset I$.

■

10. L are toate idealele principale dacă și numai dacă L satisface condiția maximală, adică orice lanț (crescător) este staționar.

Soluție. " \implies " : Presupunem că L nu satisface condiția maximală, atunci $\exists c_0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n < \dots$ infinit în L .

Fie $I_k =]\leftarrow, c_k]$. Rezultă $\{I_k\}_k$ lanț, deci $\bigcup_k I_k = I$ ideal și conform ipotezei, I este principal, deci $\exists d \in L$ astfel încât $I =]\leftarrow, d]$, contradicție cu faptul că $\forall x \in L, \exists c_n > x, c_n \in I$.

" \impliedby " : Fie I ideal al lui L . Rezultă că în I are loc condiția maximală, deci $\exists \max I \stackrel{\text{not.}}{=} a$, de unde $I =]\leftarrow, a]$, pentru că $\forall y \leq a, y \in I$. ■

11. Idealele, filtrele sunt sublatici convexe ale lui L , adică satisfac condiția: $\forall a, b \in I$ cu $a \leq b \implies [a, b] \subset I$.

Soluție. Într-adevăr, dacă I ideal și $a, b \in I, a \leq b$, atunci $I \supseteq]\leftarrow, b] \supset [a, b]$, deci I este convex. Similar, se arată afirmația referitoare la filtre. ■

12. Orice sublatică convexă a lui L este intersecția dintre un ideal și un filtru.

Soluție. Fie L' o sublatică convexă a lui l .

Definim $I = \{x \in L \mid \exists v \in L' : x \leq v\}$. Arătăm că I este ideal.

$$\bullet \quad x, y \in I \implies \exists v, w \in L' : x \leq v, y \leq w \implies$$

$$\implies x \vee y \leq v \vee w \in L' \implies x \vee y \in I.$$

- $x \in I, y \leq x \implies y \in I$.

Deci, I este ideal.

Dualul lui $I : F = \{x \in L \mid \exists v \in L' : v \leq x\}$ este un filtru.

Verificăm că $L' = I \cap F$.

" \subset " : Rezultă din definiția lui I și definiția lui F .

" \supset " : Fie $t \in I \cap F \implies \exists u, v \in L'$ astfel încât $u \leq t \leq v$.

Cum L' este convexă rezultă $[u, v] \subset L'$, deci $t \in L'$. ■

13. Fie L o latice (mulțime ordonată) care satisface condiția maximală. Atunci L are maxim (element maximal).

Soluție. Este suficient, conform exercițiului 1, să arătăm că L are un element maximal.

Fie $x_1 \in L$. Dacă x_1 maximal, am terminat.

Dacă nu, $\exists x_2 > x_1$. Dacă x_2 maximal, am terminat.

Dacă nu, $\exists x_3 > x_2 > x_1$.

...

L satisface condiția maximală, deci șirul $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$ este staționar, adică se termină cu un x_n , pentru care $\nexists y, y > x_n$.

Cu alte cuvinte, x_n este maximal. ■

14. Dacă L este o latice, atunci există un morfism injectiv de ordine $f : L \rightarrow \mathcal{P}(L)$, încât

$$\forall x, y \in L, f(x \wedge y) = f(x) \cap f(y).$$

Soluție. Definim f astfel:

$$f : L \rightarrow \mathcal{P}(L), f(x) = I_x = \{t \in L \mid t \leq x\}.$$

f este injectiv: dacă $x, y \in L$ satisfac egalitatea $f(x) = f(y)$, atunci $x \in I_x = I_y$, de unde $x \leq y$ și $y \in I_y = I_x$, de unde $y \leq x$.

Apoi, f este morfism de ordine; dacă $x, y \in L$, $x \leq y$, atunci $I_x \subseteq I_y$ adică $f(x) \subseteq f(y)$ și reciproc, dacă $f(x) \subseteq f(y)$, atunci $x \in I_x \subseteq I_y$, deci $x \leq y$.

În sfârșit, pentru orice $x, y \in L$ avem echivalența:

$$z \in f(x \wedge y) \iff z \leq x \wedge y \iff z \in I_x \cap I_y \iff z \in f(x) \cap f(y).$$

■

8.2 Latici modulare

Definiția 55 Spunem că o latice L este **modulară (dedekindiană)** dacă:

$$\forall a, b, c \in L, a \leq c \implies a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c.$$

Observația 20 O sublatice a unei latici modulare este modulară.

Exemplul 66 Dacă $A = \{a, b, c\}$, atunci

$$\mathcal{P}' = (\{A, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}, \subseteq)$$

este o latice modulară.

Observația 21 *Laticea L modulară dacă și numai dacă*

$$[\forall a, b, c \in L, a \leq c \implies a \vee (b \wedge c) \geq (a \vee b) \wedge c].$$

Cealaltă inegalitate are loc mereu.

Teorema 37 (Teoremă de caracterizare). *Laticea L este modulară dacă și numai dacă*

$$\begin{cases} a \leq b \\ a \vee c = b \vee c \implies a = b, \\ a \wedge c = b \wedge c \end{cases}$$

unde $a, b, c \in L$.

Demonstrație. Să remarcăm mai întâi că ipoteza condiției trebuie satisfăcută de un anumit element c din L , nu de orice element din L .

" \implies " Fie $a \leq b$, $a \vee c = b \vee c$, $a \wedge c = b \wedge c$.

Obținem

$$\begin{cases} a \vee (b \wedge c) = a \vee (a \wedge c) = a \\ (a \vee c) \wedge b = (b \vee c) \wedge b = b. \end{cases}$$

Din L modulară, rezultă pentru $a \leq b$, $a \vee (b \wedge c) = (a \vee c) \wedge b$.

Deci, $a = b$.

" \Leftarrow " Fie $a \leq c$ și notăm $\begin{cases} a_1 = a \vee (b \wedge c) \\ c_1 = (a \vee b) \wedge c. \end{cases}$

În orice latice, pentru $a \leq c$ avem $a \vee (b \wedge c) \leq (a \vee b) \wedge c$ (condiția de submodularitate).

Deci, $a \leq a_1 \leq c_1 \leq c$.

Pentru a demonstra că $a_1 = c_1$, verificăm

$$\begin{cases} a_1 \vee b = c_1 \vee b; \\ a_1 \wedge b = c_1 \wedge b. \end{cases}$$

Din $a_1 \leq c_1$ rezultă $a_1 \vee b \leq c_1 \vee b$.

Din $a \leq a_1$ rezultă $c_1 = (a \vee b) \wedge c \leq a \vee b \leq a_1 \vee b$, deci $c_1 \leq a_1 \vee b$.

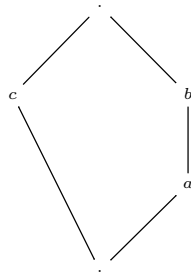
Dar $b \leq a_1 \vee b$, deci $c_1 \vee b \leq a_1 \vee b$. Așadar, $a_1 \vee b = c_1 \vee b$.

Similar, $a_1 \wedge b = c_1 \wedge b$. Deci, $a_1 = c_1$. ■

Teorema 38 (Teoremă de caracterizare). *Laticea L este modulară dacă și numai dacă L nu conține o sublatice formată din 5 elemente, izomorfă cu laticea pentagon.*

Demonstrație. " \implies " Fie L o latice modulară.

Presupunem că L conține o sublatice izomorfă cu:

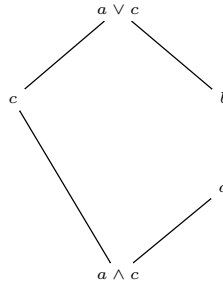


Atunci L nu este modulară, pentru că

$$\begin{cases} a \leq b \\ a \vee c = b \vee c, \\ a \wedge c = b \wedge c \end{cases},$$

dar $a \neq b$, contradicție.

” \Leftarrow ” Presupunem că L nu este modulară. Atunci există $a, b, c \in L$ diferite, astfel încât $a < b$ și $a \vee c = b \vee c$, $a \wedge c = b \wedge c$, deci următoarea diagramă reprezintă o sublatice a lui L , contradicție cu ipoteza.



■

Exerciții

1. Arătați că mulțimea $\mathcal{N}(G)$ a subgrupurilor normale ale unui grup G este latice modulară.

Soluție. În laticea $(\mathcal{N}(G), \cap, \vee)$ avem $N_1 \vee N_2 = N_1 \cdot N_2$.

Verificăm condiția de modularitate:

$$\forall A \leq B, (C \cdot A) \cap B \subseteq (C \cap B) \cdot A.$$

Fie $b \in (C \cdot A) \cap B$. Rezultă $b = c \cdot a$, $c \in C$, $a \in A$, de unde

$$c = ba^{-1} \in B, \text{ deci } c \in C \cap B.$$

Dar, $a \in A$, deci $b \in (C \cap B) \cdot A$.

■

2. Latticea submodulelor unui R -modul este modulară.

3. Mulțimea subgrupurilor finit generate ale unui grup G nu formează neaparat o latice.

Soluție.

Dacă $S_1 = \langle g_1, \dots, g_k \rangle \leq G$ și $S_2 = \langle g'_1, \dots, g'_s \rangle \leq G$, atunci $[S_1 \cup S_2] = \langle g_1, \dots, g_k, g'_1, \dots, g'_s \rangle = \sup(S_1, S_2)$ finit generat.

În schimb, intersecția de subgrupuri finit generate este un subgrup, care nu e neaparat finit generat. ■

Prezentăm mai jos un exemplu de grup finit generat, care are un subgrup, care nu este finit generat:

Fie $(S(\mathbb{R}), \circ)$ grupul bijecțiilor de la \mathbb{R} la \mathbb{R} .

$$f, g \in S(\mathbb{R}), \quad \begin{cases} f(x) = x + 1 \\ g(x) = 2x. \end{cases}$$

Considerăm $f_n = g^{-n} f g^n$ și $G = \langle f, g \rangle$ finit generat.

Considerăm $H_n = \langle f_n \rangle$ și $H = \bigcup_{n \geq 1} H_n$.

Rezultă că $H \leq G$, pentru că $\forall n, H_n \leq H_{n+1}$.

Într-adevăr, avem $\begin{cases} g^n(x) = 2^n x \\ g^{-n}(x) = \frac{x}{2^n}. \end{cases}$

Deci, $f_n(x) = \frac{2^n x + 1}{2^n} = x + \frac{1}{2^n}$, de unde

$$f_n(x) = (f_{n+1} \cdot f_{n+1})(x)$$

care implică $f_n \in H_{n+1}$ adică $H_n \leq H_{n+1}$.

Deci $H \leq G$ și H nu este finit generat.

8.3 Latici distributive

Definiția 56 *O latice L este distributivă dacă*

$$\forall a, b, c \in L, (a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c).$$

Observația 22 *Orice latice distributivă e modulară. Reciproca nu este valabilă.*

Exemplul 67 *Considerăm $A = \{a, b, c\}$. Atunci*

$$\mathcal{P}' = (\{A, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}, \subseteq)$$

este o latice modulară, dar nu este distributivă:

$$\begin{aligned} (\{a\} \vee \{b\}) \wedge \{c\} &= A \wedge \{c\} = \{c\}; \\ (\{a\} \wedge \{c\}) \vee (\{b\} \wedge \{c\}) &= \emptyset \vee \emptyset = \emptyset. \end{aligned}$$

Observația 23 *O sublatice a unei latici distributive este distributivă.*

Observația 24 *Laticea L este distributivă dacă și numai dacă*

$$\forall a, b, c \in L, (a \vee b) \wedge c \leq (a \wedge c) \vee (b \wedge c),$$

pentru că în orice latice are loc inegalitatea inversă.

Exemplul 68 *Tripletul $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap)$ este o latice distributivă.*

Teorema 39 (Teoremă de caracterizare) Fie L o latice. Are loc echivalența:

1. L distributivă;
2. $\forall a, b, c \in L, (a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$ (duala egalității din definiție).
3. $\forall a, b, c \in L, (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c)$.

Demonstrație. "1. \implies 2."

Din definiție avem $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$.

Notăm $(b \wedge c) = d$.

Deci,

$$(a \vee c) \wedge (b \vee c) = (a \wedge d) \vee (c \wedge d) = [a \wedge (b \vee c)] \vee [c \wedge (b \vee c)] =$$

$$\stackrel{\text{def.}}{=} (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee c = (a \wedge b) \vee c$$

(aplicăm 1. de două ori).

"2. \implies 3." Notăm $(a \wedge c) \vee (b \wedge c) = d$.

Avem

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \stackrel{2.}{=} (a \vee d) \wedge (b \vee d) =$$

$$= [a \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)] \wedge [b \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)] =$$

$$= [a \vee (b \wedge c)] \wedge [b \vee (b \wedge c)] \stackrel{2.}{=}$$

$$= (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee a) \wedge (b \vee c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c).$$

"3. \implies 1." Presupunem $a \leq c$.

Atunci $a \wedge b \leq b \wedge c$.

Dar,

$$\begin{aligned} a \vee c &= c \stackrel{3.}{\equiv} (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) = \\ &= (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \stackrel{3.}{\equiv} (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c) = (a \vee b) \wedge c, \end{aligned}$$

deci obținem 1. pentru $a \leq c$.

Notez cu (*) egalitatea 1. pentru $a \leq c$.

În cazul general, notăm

$$\begin{cases} u = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \\ v = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c). \end{cases}$$

Din 3., $u = v$ implică $c \wedge u = c \wedge v$.

Dar

$$\begin{aligned} c \wedge u &= c \wedge [(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \vee (b \wedge c)] \stackrel{(*)}{\equiv} \\ &= [c \wedge (a \wedge b)] \vee [c \wedge ((a \wedge c) \vee (b \wedge c))] = (a \wedge c) \vee (b \wedge c). \end{aligned}$$

Avem $c \vee v = c \wedge (a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (b \vee c) = c \wedge (a \vee b)$.

Deci, $\forall a, b, c \in L$, $(a \wedge b) \vee (b \wedge c) = c \wedge (a \vee b)$. ■

Teorema 40 (Teoremă de caracterizare). Fie L o latice.

L este distributivă \iff

$$\forall a, b, c \in L, \left. \begin{array}{l} a \vee c = b \vee c \\ a \wedge c = b \wedge c \end{array} \right\} \implies a = b.$$

Demonstrație. " \implies " Avem:

$$\begin{aligned} a &= a \wedge (a \vee c) = a \wedge (b \vee c) \stackrel{\text{ip.}}{\equiv} \\ &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = (a \wedge b) \vee (b \wedge c) \stackrel{\text{ip.}}{\equiv} b \wedge (a \vee c) = \end{aligned}$$

$$= b \wedge (b \vee c) = b.$$

” \Leftarrow ” Conform teoremei anterioare, L este modulară.

Avem

$$a \wedge b \leq a \vee b \implies u = (a \wedge b) \vee [c \wedge (a \vee b)] \stackrel{1.}{=} [(a \wedge b) \vee c] \wedge (a \vee b).$$

Avem

$$b \wedge c \leq b \vee c \implies v = (b \wedge c) \vee [a \wedge (b \vee c)] \stackrel{2.}{=} [(b \wedge c) \vee a] \wedge (b \vee c).$$

Vrem să arătăm că $u = v$.

Pentru aceasta verificăm că: $u \wedge b = v \wedge b$ și $u \vee b = v \vee b$.

Avem

$$\begin{aligned} a \wedge b \leq b &\stackrel{\text{mod.}}{\implies} u \wedge b = [(a \wedge b) \vee (c \wedge (a \vee b))] \wedge b = \\ &= (a \wedge b) \vee [c \wedge (a \vee b) \wedge b] = (a \wedge b) \vee (b \wedge c). \end{aligned}$$

De asemenea,

$$\begin{aligned} b \wedge c \leq b &\stackrel{\text{mod.}}{\implies} v \wedge b = [(b \wedge c) \vee (a \wedge (b \vee c))] \wedge b = \\ &= (b \wedge c) \vee [a \wedge (b \vee c) \wedge b] = \\ &= (b \wedge c) \vee (a \wedge b). \end{aligned}$$

Deci, $u \wedge b = v \wedge b$.

Similar, $u \vee b = v \vee b$.

Utilizând ipoteza, rezultă $u = v$, de unde $u \wedge a = v \wedge a$.

Dar,

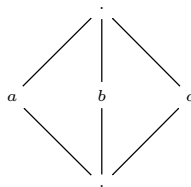
$$\begin{aligned} u \wedge a &= [(a \wedge b) \vee (c \wedge (a \vee b))] \wedge a \stackrel{\text{mod.}}{=} \\ &= [(a \wedge b) \vee c] \wedge (a \vee b) \wedge a = a \wedge [(a \wedge b) \vee c] \stackrel{\text{mod.}}{=} \\ &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \end{aligned}$$

și

$$\begin{aligned} v \wedge a &= [(b \wedge c) \vee (a \wedge (b \vee c))] \wedge a \stackrel{\text{mod.}}{=} \\ &= [(b \wedge c) \vee a] \wedge (b \vee c) \wedge a = (b \vee c) \wedge a. \end{aligned}$$

Deci, $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$, $\forall a, b, c \in L$. ■

Teorema 41 *Fie L o latice. L distributivă dacă și numai dacă L modulară și L nu conține o sublatice izomorfă cu laticea diamant:*



Demonstrație. ” \implies ” Laticea L nu conține o sublatice izomorfă cu cea de mai sus, pentru că aceasta nu este distributivă:

$$a \vee b = b \vee c, a \wedge b = b \wedge c, \text{ dar } a \neq b.$$

” \impliedby ” Presupunem că L e modulară, dar nu este distributivă. Din teorema anterioară rezultă că:

$$\exists a, b, c : \begin{array}{l} a \vee c = b \vee c \\ a \wedge c = b \wedge c \end{array}, a \neq b.$$

Pentru că L este modulară, a și b nu sunt comparabile.

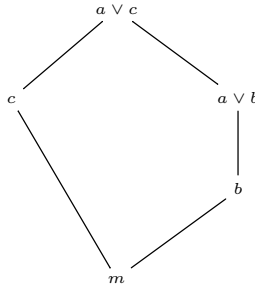
Pe de altă parte, a și c nu sunt comparabile.

Presupunem $a \leq c$. Din $a \vee c = b \vee c$ rezultă $b \vee c = c$ deci $b \leq c$.

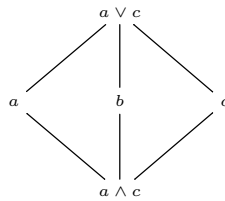
Dar $a \wedge c = b \wedge c$ și obținem $a = b$, fals.

Presupunem $c \leq a$ și raționăm prin dualitate.

Similar, b și c nu sunt comparabile. Rezultă că $a \vee c = b \vee c$, $a \wedge b = b \wedge c$, $a \vee b \leq a \vee b \vee c = a \vee c$. Dacă am presupune $a \vee b \neq a \vee c$, atunci am obține sublaticea de mai jos, ceea ce ar însemna la L nu este modulară, fals!



Deci $a \vee b = a \vee c$ și obținem astfel sublaticea:



contradicție cu ipoteza. Deci L este distributivă. ■

8.4 Latici Boole

Definiția 57 O latice se numește **Boole** sau **algebră Boole** dacă:

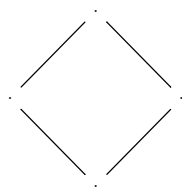
$$\left\{ \begin{array}{l} L \text{ distributivă;} \\ \exists 0 = \min L; \exists 1 = \max L; \\ \forall a \in L, \exists a' \in L : \begin{cases} a \vee a' = 1 \\ a \wedge a' = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

a' se numește **complementul** lui a .

Exemplul 69 Tripletul $(\mathcal{P}(M), \cup, \cap)$ cu $0 = \emptyset$, $1 = M$, $A' = CA$ este o algebră Boole.

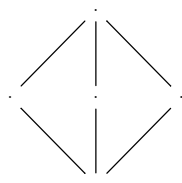
Observația 25 Fie (M, \leq) o mulțime total ordonată, astfel încât $|M| > 2$ și M are 0 și 1 . Nu rezultă de aici că toate elementele lui M au complement.

Observația 26 Fie laticea L :



În L orice element are exact un complement.

Observația 27 Considerăm laticea L' :



În L' orice element are măcar un complement, dar L' nu este algebră Boole, pentru că nu este distributivă.

Observația 28 Dacă L este latică Boole, $\left\{ \begin{array}{l} \wedge, \vee \text{ operații binare;} \\ 0, 1 \text{ operații nulare;} \\ x \rightarrow x' \text{ operație unară.} \end{array} \right.$

Definiția 58 Fie L o latică completă, adică $\exists \bigwedge_{i \in I} b_i, \exists \bigvee_{i \in I} b_i$, unde I este o mulțime de indici arbitrară.

L se numește **infinit distributivă** dacă $\forall a \in L, \forall b_i \in L, i \in I,$

$$\begin{cases} a \wedge \left(\bigvee_{i \in I} b_i \right) = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i); \\ a \wedge \left(\bigwedge_{i \in I} b_i \right) = \bigwedge_{i \in I} (a \wedge b_i). \end{cases}$$

Exemplul 70 Orice sublatice completă a lui $(\mathcal{P}(M), \subseteq)$ este infinit distributivă, pentru că:

$$x \in A \wedge \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) \iff \exists i : x \in A \cap B_i \iff x \in \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$

și cealaltă egalitate se obține similar.

Exemplul 71 $(\mathbb{N}, |)$ este latice completă cu:

$$1 = \min(\mathbb{N}, |), \quad 0 = \max(\mathbb{N}, |), \quad \bigwedge_{x \in X \subseteq \mathbb{N}} x = \text{cmmdc } X$$

$$\bigvee_{x \in X \subseteq \mathbb{N}} x = \begin{cases} \text{cmmmc } X, & X \text{ finită} \\ 0, & X \text{ infinită.} \end{cases}$$

$(\mathbb{N}, |)$ nu este infinit distributivă:

$$\begin{cases} 2 \wedge \left[\bigvee_{k=1}^{\infty} (2k-1) \right] = 2 \wedge 0 = 2 \\ \bigvee_{k=1}^{\infty} [2 \wedge (2k-1)] = 1. \end{cases}$$

Să remarcăm că

$$a \wedge \left(\bigvee_{i \in I} b_i \right) = \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i), \quad a \wedge \left(\bigwedge_{i \in I} b_i \right) = \bigwedge_{i \in I} (a \wedge b_i)$$

nu sunt echivalente, după cum se observă în exemplul dat mai sus.

Teorema 42 *Orice latice Boole completă este infinit distributivă.*

Demonstrație. Avem

$$\bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i) \leq \left(\bigvee_{i \in I} b_i \right) \wedge a.$$

Pentru inegalitatea inversă:

$$\begin{aligned} b_i &\leq a' \vee b_i = 1 \wedge (a' \vee b_i) = \\ &= (a' \vee a) \wedge (a' \vee b_i) \leq a' \vee \left[\bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i) \right] \text{ de unde} \\ a \wedge \left(\bigvee_{i \in I} b_i \right) &\leq a \wedge \left[a' \vee \left[\bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i) \right] \right] = \\ &= (a \wedge a') \vee \left[a \wedge \left[\bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i) \right] \right]. \end{aligned}$$

Deci $a \wedge \left[\bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i) \right] \leq \bigvee_{i \in I} (a \wedge b_i)$, adică are loc egalitatea.

Prin dualitate, se obține cealaltă egalitate. ■

Definiția 59 *Fie $L' \subseteq L$ latice Boole. L' se numește **sublatice Boole** a lui L , dacă:*

$$\begin{cases} a, b \in L' \text{ implică } a \vee b, a \wedge b \in L' \\ a \in L' \text{ implică } a' \in L'. \end{cases}$$

Observația 29 *O sublatice a lui $\mathcal{P}(M)$ se numește inel de mulțimi.*

O sublatice Boole a lui $\mathcal{P}(M)$ se numește corp de mulțimi.

Teorema 43 *Fie $(a_i)_{i \in I}$ o familie de elemente ale unei algebre Boole B . Dacă, în egalități de mai jos, unul din cei doi membri*

există, atunci există și celălalt membru și au loc egalitățile:

$$\left(\bigvee_{i \in I} a_i\right)' = \bigwedge a'_i; \quad \left(\bigwedge_{i \in I} a_i\right)' = \bigvee a'_i.$$

Demonstrație.

Presupunem că $\exists a = \bigvee a'_i$ deci $\forall i \in I, a_i \leq a$, de unde $a' \leq a'_i$, $\forall i \in I$.

Fie $b \leq a'_i, \forall i \in I$. Obținem $b' \geq a_i, \forall i \in I$ și din definiția lui a rezultă $b' \geq a$ adică $b \leq a'$.

Deci, $a' = \bigwedge a'_i$, adică are loc prima egalitate (dacă există primul membru).

Similar pentru egalitatea a doua.

Presupunem acum că există membrul drept din prima egalitate. Utilizând cea de a doua egalitate, $\exists \bigvee a''_i = \bigvee a_i$, primul membru din prima egalitate și suntem în situația anterioară. ■

Definiția 60 O algebră Booleană B este **complet distributivă** dacă $\forall (a_{ij})_{i \in I, j \in J}$ din A , ori de câte ori există un membru al egalității de mai jos, atunci există și celălalt și ele sunt egale.

$$\bigwedge_{i \in I} \left(\bigvee_{j \in J} a_{ij} \right) = \bigvee_{\alpha: I \rightarrow J} \left(\bigwedge_{i \in I} a_{i\alpha(i)} \right),$$

Exemplul 72 $\mathcal{P}(A)$ este latice completă și complet distributivă, pentru orice mulțime A .

Exemplul 73 Orice algebră Boole finită este completă și complet distributivă.

Teorema 44 (Tarski). O algebră Booleană completă și complet distributivă este izomorfă cu $\mathcal{P}(A)$, unde A este o anumite mulțime.

Indicație de demonstrare: Se consideră B o algebră Booleană completă și complet distributivă,

$$f(C) = \left(\bigwedge_{a \in C} a \right) \wedge \left(\bigwedge_{a \notin C} a \right) \in B \text{ și}$$

$$A = \{f(C) \mid C \subseteq B, f(C) \neq 0\}.$$

Exerciții

1. Într-o lattice Boole, complementul este unic.

Soluție. Fie $\begin{cases} a \vee a' = 1 = a \vee a'' \\ a \wedge a' = 0 = a \wedge a'' \end{cases}$, unde a este element al unei lattice Boole.

Avem $a' = a' \wedge 1 = a' \wedge (a \vee a'') \stackrel{\text{distr.}}{=} (a' \wedge a) \vee (a' \wedge a'') = a' \wedge a''$ de unde $a' \leq a''$ și similar obținem cealaltă inegalitate.

Deci, $a' = a''$. ■

2. Într-o lattice Boole, au loc proprietățile următoare, pentru orice a și b :

- $0' = 1; 1' = 0$,
- $(a')' = a$,
- formulele lui de Morgan: $\begin{cases} (a \vee b)' = a' \wedge b' \\ (a \wedge b)' = a' \vee b' \end{cases}$,
- $a \leq b \implies b' \leq a'$,
- $a \leq b \implies a \wedge b' = 0$ și $a' \vee b = 1$.

Soluție. Avem $0 \vee 1 = 1; 0 \wedge 1 = 0$, deci $0' = 1, 1' = 0$.

Apoi $a' \vee a = 1, a' \wedge a = 0$, de unde $(a')' = a$.

Pentru formulele lui De Morgan:

$$\begin{aligned}(a' \wedge b') \vee (a \vee b) &= (a' \vee c) \wedge (b' \vee c) = \\ &= (a' \vee a \vee c) \wedge (b' \vee a \vee b) = 1\end{aligned}$$

și

$$(a' \wedge b') \wedge (a \vee b) = a' \wedge [(a \vee b) \wedge b'] = a' \wedge (a \wedge b') \vee (b \wedge b') = 0.$$

Deci, $a' \wedge b' = (a \vee b)'$.

Similar, se obține cealaltă egalitate.

Apoi, are loc șirul de implicații: $a \leq b \implies a \wedge b = a \xrightarrow{\text{de Morgan}} a' \vee b' = a' \implies b' \leq a'$.

În final, din $a \leq b$ rezultă $a \wedge b' \leq b \wedge b' = 0$ deci $a \wedge b' = 0$ și $a \vee a' \leq a' \vee b$ de unde $a' \vee b = 1$.

■

3. Laticile cu două elemente sunt algebre Boole.

Soluție. Fie $L = \{a, b\}$ și presupunem că $a \vee b = b$ adică $a \leq b$. Avem $a' = b, b' = a$. ■

4. Mulțimea propozițiilor din logica propozițională formează o algebră Boole.

Soluție. Două propoziții sunt egale dacă au aceeași valoare de adevăr. În această latică, elementul 0 este orice propoziție falsă, iar elementul 1 este orice propoziție adevărată.

Dacă a, b sunt propoziții, putem forma propozițiile $a \vee b, a \wedge b$, iar a' este negația lui a . ■

5. Fie L o latice distributivă și $I = [a, b] \subseteq L$. Mulțimea elementelor din I care au complement în I formează o algebră Booleană.

6. Fie R un inel cu 1, în care orice element este idempotent, adică $\forall x \in R, x^2 = x$ (un astfel de inel se numește *inel Boolean*.) Definim pe R :
$$\begin{cases} x \wedge y = xy \\ x' = 1 - x \end{cases}$$
 de unde obținem $x \vee y = x + y - xy$.

Atunci $(R, \vee, \wedge, ')$ este algebră Boole.

Să remarcăm că într-un inel Boolean R , avem $\text{car } R = 2$.

Într-adevăr, avem $(x + y)^2 = x + y$ de unde $xy + yx = 0$. Pentru $y = x$ obținem $2x = 0$ deci $x = -x$. Așadar, $xy = yx, \forall x, y \in R$ de unde $\text{car } R = 2$.

7. Dacă într-o algebră Boole definim:

$$\begin{cases} xy = x \wedge y \\ x + y = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) \end{cases},$$

atunci $(R, +, \cdot)$ este inel Boolean. ■

8. Fie (L, \leq) o latice completă. Dacă $f : L \rightarrow L$ este un morfism de ordine, atunci există $a \in L$, astfel încât $f(a) = a$.

Soluție. Notăm $P = \{x \in L \mid x \leq f(x)\}$. Mulțimea P este nevidă, deoarece $\inf L \in P$. Dar, laticea L este completă, deci există $\sup P$ pe care îl notăm cu a . Avem $x \leq a, \forall x \in P$.

Rezultă $x \leq f(x) \leq f(a), \forall x \in P$, de unde $f(a)$ este majorant pentru P . Așadar, $a \leq f(a)$, adică $a \in P$, de unde $f(a) \leq f(f(a))$. Deci, $f(a) \in P$, din care $f(a) \leq a$. Deci $f(a) = a$.

9. Fie (P, \leq) o mulțime parțial ordonată, în care există $\inf H$, $\forall H \subseteq P$. Să se arate că (P, \leq) este o latice.

Soluție. Din ipoteză, $\forall a, b \in P, \exists \inf \{a, b\}$.

Fie H mulțimea tuturor mulțimilor majoranților mulțimii $\{a, b\}$.

Atunci $\sup \{a, b\} = \inf H$. Într-adevăr,

- (a) $a \leq h, b \leq h, \forall h \in H$ implică $a, b \leq \inf H$;
- (b) Fie c încât $a \leq c, b \leq c$, de unde $c \in H$, deci $\inf H \leq c$.



Capitolul 9

Lanțuri în latici. Elemente ireductibile și descompuneri

9.1 Lanțuri în latici

Fie L o latice, $a, b \in L$.

Definiția 61 Fie $a \geq b$. Se numește **lanț finit** de extreme a și b orice submulțime finită $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq L$ astfel încât

$$a = a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n = b.$$

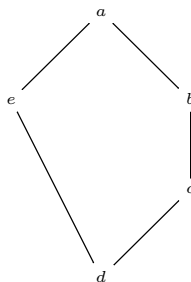
Definiția 62 Spunem că a **acoperă** pe b și scriem $a \vdash b$ dacă

$$\begin{cases} a \geq b, & a \neq b; \\ a \geq x \geq b, & x \in L \implies x = a \text{ sau } x = b. \end{cases}$$

Definiția 63 Un lanț $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ e **maximal** dacă

$$a_1 \vdash a_2 \vdash \dots \vdash a_n.$$

Exemplul 74 *Considerăm*



$$\left\{ \begin{array}{l} a \geq b \geq c \geq d \\ a \geq e \geq d \end{array} \right. \text{ sunt lanțuri maximale.}$$

Lanțul $a \geq b \geq d$ nu e maximal.

Vom arăta că în laticile modulare, lanțurile maximale au aceeași lungime.

Lema 1 Fie (L, \wedge, \vee) o latice și fie $a, b, c \in L$. Dacă $a \vdash c$ și $b \vdash c$, atunci $a \wedge b = c$ sau $a = b$.

$$\text{Demonstrație. Avem } \left. \begin{array}{l} a \geq a \wedge b \geq c \\ b \geq a \wedge b \geq c \\ a \vdash c, \quad b \vdash c \end{array} \right\} \text{ deci } a \wedge b = c \text{ sau}$$

$$a = a \wedge b = b. \quad \blacksquare$$

Lema 2 Fie (L, \wedge, \vee) o latice modulară și fie $a, b \in L$.

$$\text{Avem } b \vdash a \wedge b \iff a \vee b \vdash a.$$

Demonstrație. Arătăm că $b \vdash a \wedge b$ implică $a \vee b \vdash a$.

Reciproca se obține prin dualitate.

Avem $a \vee b \neq a$, altfel $a \geq b$, de unde $a \wedge b = b$, contradicție cu $b \vdash a \wedge b$.

Fie

$$a \vee b \geq x \geq a \quad (1)$$

Obținem

$$\left. \begin{array}{l} (a \vee b) \wedge b = b \geq x \wedge b \geq a \wedge b \\ b \vdash a \wedge b \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$b = x \wedge b \text{ sau } x \wedge b = a \wedge b \quad (2)$$

Din $a \leq x$ rezultă în baza modularității că

$$\left. \begin{array}{l} x \wedge (a \vee b) = a \vee (x \wedge b) \\ a \vee b \geq x \geq a \end{array} \right\} \text{ de unde } x = a \vee (x \wedge b) \text{ deci, din}$$

(2) rezultă $x = a \vee b$ sau $x = a \vee (a \wedge b) = a$. ■

Teorema 45 (de tip Jordan-Dedekind) *Într-o latice modulară două lanțuri finite maximale, cu aceleași extreme, au același număr de elemente.*

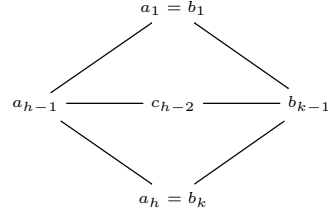
Demonstrație. Fie L modulară și fie C_1 și C_2 două lanțuri maximale cu aceleași extreme.

Fie n numărul de elemente din C_1 și m numărul de elemente din C_2 . Presupunem că $n \leq m$. Demonstrăm prin inducție după n , că $n = m$.

Pentru $n = 2$, avem $C_1 : a \vdash b$ pentru că au aceleași extreme

și C_1 maximal.

Presupunem afirmația adevărată pentru $n = h - 1$ și demonstrăm pentru $n = h$.



Fie $\begin{cases} a_1 \vdash a_2 \vdash \dots \vdash a_h \\ b_1 \vdash b_2 \vdash \dots \vdash b_k \end{cases}$, cu $h \leq k$ și $a_1 = b_1$, $a_h = b_k$.

Arătăm că $h = k$.

1. Dacă $b_{k-1} = a_{h-1}$ atunci $k - 1 = h - 1$.

2. Dacă $b_{k-1} \neq a_{h-1}$, atunci $\begin{cases} a_{h-1} \vdash a_h \\ b_{k-1} \vdash b_k \end{cases}$ de unde, în baza Lemei (1) rezultă

$$a_{h-1} \wedge b_{k-1} = a_h = b_k.$$

Fie $c_{h-2} = a_{h-1} \vee b_{k-1}$ de unde, în baza Lemei (2) rezultă $b_{k-1} \vdash b_k = a_{h-1} \wedge b_{k-1}$ și obținem $c_{h-2} \vdash a_{h-1}$.

Similar, $c_{h-2} \vdash b_{k-1}$.

(a) Dacă $c_{h-2} = a_{h-2}$, obținem

$$\begin{cases} a_1 \vdash a_2 \vdash \dots \vdash a_{h-2} \\ b_1 \vdash b_2 \vdash \dots \vdash c_{h-2} \vdash b_{k-1} \\ b_1 \vdash b_2 \vdash \dots \vdash b_{k-1}, \text{ cu } a_1 = b_1, a_{h-2} = c_{h-2} \end{cases}$$

Rezultă $h - 1 = k - 1$, adică $h = k$.

(b) Dacă $c_{h-2} \neq a_{h-2}$, din $c_{h-2} \vdash a_{h-1}$, $a_{h-2} \vdash a_{h-1}$, conform Lemei (1), rezultă $c_{h-2} \wedge a_{h-2} = a_{h-1}$.

Notăm $c_{h-3} = a_{h-2} \vee c_{h-2}$.

Din Lema 2, rezultă:

$$\bullet c_{h-2} \vdash a_{h-2} \wedge c_{h-2} = a_{h-1} \iff$$

$$c_{h-3} = a_{h-2} \vee c_{h-2} \vdash a_{h-2}.$$

$$\bullet \text{ și } a_{h-2} \vdash a_{h-1} = a_{h-2} \wedge c_{h-2} \iff$$

$$c_{h-3} = a_{h-2} \vee c_{h-2} \vdash c_{h-2}.$$

Deci, $c_{h-3} \vdash a_{h-2}$ și $c_{h-3} \vdash c_{h-2}$.

Continuând astfel:

- i. $\exists i, 1 < i < h - 1$ astfel încât $c_{h-i} = a_{h-i}$ (ca la 2.a.) și atunci

$$a_1 \vdash \dots \vdash a_{h-i} = c_{h-i} \vdash \dots \vdash c_{h-2} \vdash b_{k-1}$$

$$a_1 = b_1 \vdash b_2 \vdash \dots \vdash b_{k-1}$$

de unde $h - 1 = k - 1$ de unde $h = k$.

sau

- ii. $c_{h-i} \neq a_{h-i}, \forall i, 1 < i < h - 1$.

În acest caz, $a_2 \wedge c_2 = c_3, c_2 \vdash a_3 = a_2 \wedge c_2$
 $a_2 \vdash a_3 = a_2 \wedge c_2$ și din Lema (2) rezultă

$$c_1 = a_2 \vee c_2 \vdash a_2, c_1 \vdash c_2.$$

Din

$$\begin{cases} c_1 = a_2 \vee c_2 \\ c_2 = a_3 \vee c_3, \dots, c_{h-2} = a_{h-1} \vee b_{k-1} \end{cases}$$

obținem $a_1 \vee c_1 = a_1 \vee a_2 \vee a_3 \vee \dots \vee a_{h-1} \vee b_{k-1} = a_1$,
 pentru că $a_1 \geq a_i, \forall i \geq 1, b_1 \geq b_{k-1}, a_1 = b_1$, deci
 $a_1 \geq c_1 \vdash a_2, a_1 \vdash a_2$, de unde $a_1 = c_1$.

Avem lanțurile maximale:

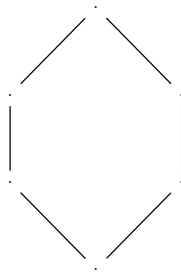
$$a_1 = c_1 \vdash c_2 \vdash \dots \vdash c_{h-2} \vdash b_{k-1}$$

$$b_1 \vdash b_2 \vdash \dots \vdash b_{k-1}$$

de unde $h - 1 = k - 1$ adică $h = k$.

■

Observația 30 *Nu doar laticile modulare satisfac condiția Jordan-Dedekind.*



Laticea de mai sus satisface condiția Jordan-Dedekind, dar nu este modulară.

9.2 Elemente ireductibile și descompuneri

Fie (L, \wedge, \vee) latice și fie $a \in L$.

Definiția 64 Spunem că a este **ireductibil** relativ la \wedge , dacă a nu poate fi scris ca $\bigwedge_{i=1}^n a_i$, $a_i \in L$, $a_i \neq a$, $\forall i = \overline{1, n}$.

a **ireductibil** relativ la \vee , dacă nu poate fi scris ca $\bigvee_{i=1}^n a_i$, $a_i \in L$, $a_i \neq a$, $\forall i = \overline{1, n}$. În caz contrar, a este **reductibil**.

Exemplul 75 Considerăm laticea $(\mathbb{N}^*, |)$. $\forall a \in \mathbb{N}^*$, a este reductibil în raport cu \cap , pentru că $\exists a_i$, $a_i \neq a$, $\forall i$ astfel încât

$$a = \text{cmmdc}(a_1, \dots, a_n).$$

$$\text{De exemplu, } \begin{cases} 1 = \text{cmmdc}(2, 3) \\ 2 = \text{cmmdc}(4, 6) \\ 3 = \text{cmmdc}(6, 9) \dots \end{cases}$$

Pe de altă parte, $\exists a \in \mathbb{N}^*$, a ireductibil relativ la \vee și $\exists a \in \mathbb{N}^*$, a reductibil relativ la \wedge :

$$1 = \text{cmmmc}(a_1, \dots, a_n) \text{ implică } a_i = 1, \forall i = \overline{1, n}.$$

$$2 = \text{cmmmc}(a_1, \dots, a_n) \text{ implică } \exists i_0 : a_{i_0} = 2, \text{ restul } a_i = 1.$$

$$3, 5, 7, \dots \text{ similar}$$

$$4 = \text{cmmmc}(a_1, \dots, a_n) \text{ implică } \exists i : a_i = 4, \text{ restul } a_i = 1.$$

$$6 = \text{cmmmc}(2, 3)$$

$$p^k = \text{cmmmc}(a_1, \dots, a_n), p \text{ prim implică } \exists i : a_i = p^k, \text{ restul } a_i = 1.$$

Toate de mai sus sunt ireductibile, mai puțin 6, care este reductibil.

Definiția 65 Fie L o latice și fie $a_1, \dots, a_n \in L$ astfel încât $a = a_1 \wedge \dots \wedge a_n$, respectiv $a = a_1 \vee \dots \vee a_n$.

Descompunerea de mai sus se numește **descompunere ireductibilă** a lui a dacă $\forall i = \overline{1, n}$, a_i ireductibil relativ la \wedge , respectiv ireductibil relativ la \vee , și nu este posibil să eliminăm din egalitate niciun a_i , fără a strica egalitatea.

Exerciții

1. Fie L o latice modulară, $a, b, c_1, c_2, \dots, c_n \in L$ astfel încât $b \leq c_i \leq a \vee b$, $\forall i = \overline{1, n}$. Atunci,

$$a \wedge (c_1 \vee c_2 \vee \dots \vee c_n) = (a \wedge c_1) \vee \dots \vee (a \wedge c_n).$$

Soluție. Demonstrăm prin inducție. Pentru $n = 2$, avem $b \leq c_1$ de unde $b \vee (a \wedge c_1) = (b \vee a) \wedge c_1 = c_1$ și deci

$$b \vee (a \wedge c_1) \vee (a \wedge c_2) = c_1 \vee (a \wedge c_2).$$

Similar, $b \vee (a \wedge c_2) \vee (a \wedge c_1) = c_2 \vee (a \wedge c_1)$ prin urmare $c_1 \vee (a \wedge c_2) = c_2 \vee (a \wedge c_1)$ de unde $c_1 \vee c_2 = c_2 \vee (a \wedge c_1)$ deci $a \wedge (c_1 \vee c_2) = (a \wedge c_1) \vee (a \wedge c_2)$.

Presupunem afirmația adevărată pentru $n = h - 1$ și demonstrăm pentru $n = h$.

Avem:

$$\begin{cases} b \leq c_1 \vee \dots \vee c_{h-1} \leq a \vee b \\ b \leq c_h \leq a \vee b \end{cases}$$

și

$$\begin{aligned}
a \wedge (c_1 \vee \dots \vee c_h) &= a \wedge [(c_1 \vee \dots \vee c_{h-1}) \wedge c_h] = \\
&= [a \wedge (c_1 \vee \dots \vee c_{h-1})] \vee (a \wedge c_h) \stackrel{\text{ip. ind.}}{=} (a \wedge c_1) \vee \dots \vee (a \wedge c_h).
\end{aligned}$$

■

2. Fie L o latice modulară și $\begin{cases} a = a_1 \vee \dots \vee a_n \\ a = a'_1 \vee \dots \vee a'_m \end{cases}$ descompuneri ireductibile. Atunci $n = m$. Similar pentru \wedge .

Soluție. Presupunem că n este minim ca lungime a descompunerilor ireductibile. Atunci $n \leq m$.

$$\text{Notăm } \begin{cases} b_1 = a_2 \vee \dots \vee a_n \\ c_i = b_1 \vee a'_i, i = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Avem $a = a_1 \vee b_1$ și $b_1 \leq c_i \leq a = a_1 \vee b_1$, pentru că $a'_i \leq a$ și $b_1 \leq a$ de unde $c_i \leq a$. Conform exercițiului anterior,

$$\begin{aligned}
(a_1 \wedge c_1) \vee \dots \vee (a_1 \wedge c_m) &= a_1 \wedge (c_1 \vee \dots \vee c_m) = \\
&= b_1 \vee a = a_1.
\end{aligned}$$

Deci, $a_1 = (a_1 \wedge c_1) \vee \dots \vee (a_1 \wedge c_m)$, dar a_1 ireductibil, rezultă că

$$\begin{aligned}
\exists j : a_1 = a_1 \wedge c_j &\implies a = a_1 \vee b_1 = \\
&= b_1 \vee (a_1 \wedge c_j) \stackrel{L \text{ mod.}}{=} (b_1 \vee a_1) \wedge c_j = \\
&= a \wedge c_j = c_j \implies a = c_j = b_1 \vee a'_j = \\
&= a'_j \vee a_2 \vee \dots \vee a_n,
\end{aligned}$$

a'_j, a_2, \dots, a_n ireductibile.

Cum n minim, rezultă că nicio componentă din descompunerea de mai sus nu poate fi eliminată.

Deci, $a = a'_j \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$ este descompunere ireductibilă.

Repetând raționamentul, înlocuim a_2 cu a'_h , $h \neq j, \dots$ obținem o descompunere a lui a astfel:

$$a = a'_{j_1} \vee \dots \vee a'_{j_n}, \quad n \leq m.$$

Dar, $a = a'_1 \vee \dots \vee a'_m$ și nicio componentă nu poate fi eliminată. Deci $n = m$. ■

3. Fie L o latice distributivă, $a \in L$. Atunci a admite cel mult o descompunere ireductibilă relativ la \vee , respectiv la \wedge .

Soluție.

Presupunem că există două descompuneri ireductibile pentru a relativ la \vee .

Din exercițiul anterior rezultă că au același număr de componente.

$$\begin{cases} a = a_1 \vee \dots \vee a_n \\ a = a'_1 \vee \dots \vee a'_n. \end{cases}$$

Avem

$$\begin{aligned} a_1 = a_1 \wedge a &= a_1 \wedge (a'_1 \vee \dots \vee a'_n) = (a_1 \wedge a'_1) = \\ &= \vee \dots \vee (a_1 \wedge a'_n), \end{aligned}$$

dar a_1 ireductibil relativ la \vee , rezultă că

$$\exists i : a_1 = a_1 \wedge a'_i \text{ de unde } a_1 \leq a'_i.$$

Similar, $\exists h : a'_i \leq a_h$. Deci, $a_1 \leq a_h$.

Cum descompunerea este ireductibilă relativ la \vee , rezultă că $h = 1$, altfel elimin a_1 din descompunere.

Deci, $a_1 \leq a'_i \leq a_1$ de unde $a_1 = a'_i$.

Analog, orice componentă din prima descompunere coincide cu o componentă din a doua descompunere.

Similar pentru \wedge . ■

Exemplul 76 În laticea $(\mathbb{N}^*, |)$, în care $a \vee b = [a, b]$ și $a \wedge b = (a, b)$, un element este ireductibil relativ la \vee dacă și numai dacă este puterea unui număr prim. Din exercițiul anterior rezultă că orice $n > 1$, n se scrie în mod unic ca produs de puteri de numere prime distincte.

Capitolul 10

Sisteme de închidere.

Operatori de închidere

10.1 Sisteme de închidere

Sistemele de închidere sunt latici complete particulare, pe care le vom analiza în acest capitol, în conexiune cu operatorii de închidere. În particular, mulțimea subalgebrelor unei algebre universale și mulțimea congruențelor sale sunt sisteme de închidere.

Definiția 66 Numim *sistem de închidere* pe A o submulțime $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$, astfel încât orice intersecție de elemente din \mathcal{C} este tot în \mathcal{C} , adică:

$$\forall \mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}, \bigcap_{A' \in \mathcal{D}} A' \in \mathcal{C}.$$

Observația 31 Dacă $\mathcal{D} = \emptyset$ atunci prin convenție $\bigcap_{A' \in \emptyset} A' = A \in \mathcal{C}$, deci $A \in \mathcal{C}$, pentru orice sistem de închidere \mathcal{C} . Cu alte cuvinte, $\inf \emptyset$ în (\mathcal{C}, \subseteq) este $A \in \mathcal{C}$.

Teorema 46 1. (\mathcal{C}, \subseteq) este o latice completă;

2. \mathcal{C} nu este în general o sublatice a lui $\mathcal{P}(A)$.

Demonstrație.

1. Folosim rezultatul: " Mulțimea ordonată (A, \leq) este o latice dacă și numai dacă $\forall B \subseteq A, \exists \inf B$, iar în acest caz laticea este completă."

Să arătăm că $\exists \sup B$.

Fie C mulțimea majoranților lui B în A .

Fie $a = \inf C$. Pe de altă parte, $\forall b \in B, \forall c \in C, b \leq c$, deci $\forall b \in B, b \leq a$; dacă $\forall b \in B, b \leq a'$ atunci $a' \in C$, de unde $a \leq a'$. Deci, $a = \sup B$.

2. Fie $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$. Este posibil ca $\sup_{\mathcal{P}(A)} \mathcal{D} \neq \sup_{\mathcal{C}} \mathcal{D}$, pentru că $\sup_{\mathcal{C}} \mathcal{D}$ este infimul mulțimii majoranților lui \mathcal{D} în \mathcal{C} , adică $\sup_{\mathcal{C}} \mathcal{D} = \cap \{Y \in \mathcal{C} \mid \forall X \in \mathcal{D}, X \subseteq Y\}$ deci $\sup_{\mathcal{C}} \mathcal{D} \in \mathcal{C}$, în timp ce $\sup_{\mathcal{P}(A)} \mathcal{D} = \bigcup_{x \in \mathcal{D}} X$.

Pe de altă parte, $\inf_{\mathcal{C}} \mathcal{D} = \inf_{\mathcal{P}(A)} \mathcal{D} = \bigcap_{x \in \mathcal{D}} X \in \mathcal{C}$.

■

Exemplul 77 Mulțimea relațiilor reflexive (simetrice, tranzitive) pe A sunt sisteme de închidere pe $A \times A$.

Exemplul 78 Dacă A este un spațiu topologic, atunci mulțimea submulțimilor închise ale lui A formează un sistem de închidere. Acest sistem este închis la reuniuni finite.

Orice sistem de închidere \mathcal{C} , care satisface condiția $\forall A, B \in \mathcal{C}, A \cup B \in \mathcal{C}$, se numește **topologic**.

10.2 Operatori de închidere

Definiția 67 $J : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ se numește **operator de închidere** pe mulțimea A , dacă satisface următoarele condiții:

1. *extensivitate*: $\forall X \in \mathcal{P}(A), X \subseteq J(X)$;
2. *monotonie*: $X, Y \in \mathcal{P}(A), X \subseteq Y \implies J(X) \subseteq J(Y)$;
3. *idempotență*: $\forall X \in \mathcal{P}(A), J(J(X)) \subseteq J(X)$.

$J(X)$ se numește **închiderea** lui X .

X se numește **închisă** dacă $J(X) = X$.

Observația 32 Din definiție rezultă $\forall X \in \mathcal{P}(A), J(J(X)) = J(X)$.

Teorema 47 Fie \mathcal{C} un sistem de închidere pe A ,

$$\begin{cases} J : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A) \\ X \rightsquigarrow \cap \{Y \in \mathcal{C} \mid \forall X \in \mathcal{D}, X \subseteq Y\} \end{cases}$$

Atunci J este operator de închidere.

$J(X)$ este cea mai mică submulțime din \mathcal{C} , în care X este inclusă.

Demonstrație. Verificăm condițiile definiției precedente.

1. Rezultă imediat.

2. Fie $X \subseteq Z$. Atunci

$$J(Z) = \cap \{Y \in \mathcal{C} \mid \forall Z \in \mathcal{D}, X \subseteq Z \subseteq Y\} \supseteq J(X).$$

3. Arătăm că

$$J(X) = X \iff X \in \mathcal{C}. \quad (*)$$

" \implies " : $J(X) = X$ implică $X = \bigcap \{Y \in \mathcal{C} \mid X \subseteq Y\}$ deci $X \in \mathcal{C}$.

" \impliedby " : $X \in \mathcal{C}$, deci X este un Y , de unde $J(X) \subseteq X \subseteq J(X)$.

Cum $J(X) \in \mathcal{C}$ rezultă, în baza lui (*), că $J(J(X)) = J(X)$. ■

Teorema 48 *Fie $J : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ un operator de închidere. Dacă $\mathcal{C} = \{X \subseteq A \mid J(X) = X\}$, atunci \mathcal{C} este sistem de închidere pe A .*

Demonstrație.

Fie $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}$ și $X = \bigcap_{X' \in \mathcal{D}} X'$. Atunci $X \subseteq X', \forall X' \in \mathcal{D}$, de unde $J(X) \subseteq J(X')$ deci $J(X) \subseteq \bigcap_{X' \in \mathcal{D}} X' = X \subseteq J(X)$, adică $J(X) = X$ de unde $X \in \mathcal{C}$. ■

Teorema 49 *Fie A o mulțime nevidă. Există o corespondență bijectivă între mulțimea sistemelor de închidere și mulțimea operatorilor de închidere.*

Demonstrație. " \implies " : Fie \mathcal{C} un sistem de închidere pe A . Îi asociem operatorul:

$$\left\{ \begin{array}{l} J : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A) \\ X \rightsquigarrow \bigcap \{Y \in \mathcal{C} \mid X \subseteq Y\} \end{array} \right.$$

Avem $J(X) = X \iff X \in \mathcal{C}$. Asociem acum operatorului J sistemul de închidere $\mathcal{C}' = \{X \subseteq A \mid J(X) = X\}$. Așadar, $\mathcal{C}' = \mathcal{C}$.

" \impliedby " : Fie J un operator de închidere și îi asociem sistemul de închidere $\mathcal{C} = \{X \subseteq A \mid J(X) = X\}$, apoi acestuia operatorul $J' : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$.

$J'(X) = \cap \{Y \in \mathcal{C} \mid X \subseteq Y\}$. Avem

$$J'(X) = X \iff X \in \mathcal{C} \stackrel{\text{def. } \mathcal{C}}{\iff} J(X) = X.$$

Dar $\forall X \subseteq A$, $J(J(X)) = J(X)$ de unde $J'(J(X)) = J(X)$.

Din $X \subseteq J(X)$ rezultă $J'(X) \subseteq J'(J(X)) = J(X)$, deci $J'(X) \subseteq J(X)$, $\forall X$.

Analog raționăm pentru " \supseteq ". Deci, $J = J'$. ■

Definiția 68 Fie J un operator de închidere pe A . J se numește **algebraic** dacă:

$\forall a \in A$, din $a \in J(X)$ rezultă că există o submulțime finită $X_f \subseteq X$, astfel încât $a \in J(X_f)$.

\mathcal{C} este **sistem de închidere algebraic** dacă J (asociat lui \mathcal{C}) este algebraic.

Teorema 50 Dacă J operator de închidere pe A , atunci J este algebraic dacă și numai dacă

$$\forall X \subseteq A, J(X) = \cup \{J(X_f) \mid X_f \subseteq X, X_f \text{ finită}\}.$$

Demonstrație. " \Leftarrow ": Imediat.

" \Rightarrow ": Fie $a \in J(X)$. Rezultă că $\exists X_f \subseteq X : a \in J(X_f)$, de unde $J(X) \subseteq \cup \{J(X_f) \mid X_f \subseteq X\}$.

Invers, din $X_f \subseteq X$ rezultă $J(X_f) \subseteq J(X)$ deci

$$\cup \{J(X_f) \mid X_f \subseteq X\} \subseteq J(X).$$

Așadar, are loc egalitatea. ■

Teorema 51 Fie \mathcal{C} sistem de închidere pe A . Atunci \mathcal{C} este algebric dacă și numai dacă

$$\forall \mathcal{D} \neq \emptyset, \mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}, \mathcal{D} \text{ dirijată la dreapta}, \bigcup_{X \in \mathcal{D}} X \in \mathcal{C}.$$

Demonstrație. " \implies " : Fie $K = \bigcup_{X \in \mathcal{D}} X$.

Considerăm J operatorul de închidere definit de \mathcal{C} .

Avem

$$J(K) = K \iff K \in \mathcal{C}.$$

Arătăm că $J(K) = K$ ($\iff J(K) \subseteq K$).

Fie $x \in J(K)$. Cum J este algebric, rezultă că

$$\exists K_f = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq K : x \in J(K_f).$$

Din $x_i \in K = \bigcup_{X \in \mathcal{D}} X$ rezultă că $\exists X_i \in \mathcal{D} : x_i \in X_i, \forall i = \overline{1, n}$, dar \mathcal{D} este dirijată la dreapta, deci

$$\exists X \in \mathcal{D} : x_i \in X, \forall i = \overline{1, n} \text{ adică } K_f \subseteq X.$$

Din $x \in J(K_f)$ rezultă $x \in J(X) \stackrel{X \in \mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}}{=} X \subseteq K$ deci $x \in K$, adică $J(K) \subseteq K$.

" \impliedby " : Fie $X \subseteq A$ și $\mathcal{D} = \{J(X_f) \mid X_f \subseteq X \text{ finită}\} \subseteq \mathcal{C}$, pentru că $J(J(X_f)) = J(X_f)$.

Arătăm că \mathcal{D} este dirijată la dreapta. Din $J(X_f), J(X'_f) \in \mathcal{D}$ rezultă $J(X_f \cup X'_f) \subseteq \mathcal{D}$, unde $J(X_f \cup X'_f)$ include $J(X_f), J(X'_f)$.

Rezultă din ipoteză că $Y = \bigcup_{J(X_f) \in \mathcal{D}} J(X_f) \in \mathcal{C}$, dar $J(X_f) \subseteq J(X)$ deci $Y \subseteq J(X)$.

Cum $X = \bigcup_{X_f \subseteq X} X_f \subseteq \bigcup_{X_f \subseteq X} J(X_f) = Y$ avem $X \subseteq Y$ și deci $J(X) \subseteq J(Y) = Y \subseteq J(X)$, pentru că $Y \in \mathcal{C}$.

Deci, $J(X) = Y = \bigcup_{J(X_f) \in \mathcal{D}} J(X_f) = \bigcup_{X_f \subseteq X} J(X_f)$ de unde $J(X) = \bigcup_{X_f \subseteq X} J(X_f)$ adică J este un operator algebric. ■

10.3 Latticea subalgebrelor unei algebre universale

Fie (A, Ω) o algebră universală, iar $S(A, \Omega)$ mulțimea subalgebrelor sale.

Teorema 52 $S(A, \Omega)$ este un sistem de închidere algebric pe A .

Demonstrație. Fie $\mathcal{C} \subseteq S(A, \Omega)$, $C = \bigcap_{B \in \mathcal{C}} B$.

Arătăm că C este o subalgebră a lui (A, Ω) .

Fie $\omega \in \Omega$; $x_1, \dots, x_{\tau(\omega)} \in C \subseteq B$, $\forall B \in \mathcal{C}$.

Cum B este o subalgebră, rezultă că

$$\omega(x_1, \dots, x_{\tau(\omega)}) \in B, \forall B \in \mathcal{C},$$

de unde $\omega(x_1, \dots, x_{\tau(\omega)}) \in C$. Deci, $S(A, \Omega)$ este un sistem de închidere pe A .

Verificăm algebricitatea sistemului de închidere, adică arătăm că $\forall \mathcal{D} \subseteq S(A, \Omega)$, unde \mathcal{D} este nevidă și dirijată la dreapta,

$$E = \bigcup_{B \in \mathcal{D}} B \in S(A, \Omega).$$

Fie $\omega \in \Omega$; $x_1, \dots, x_{\tau(\omega)} \in E$, adică $\forall i \in \overline{1, \tau(\omega)}, \exists B_i \in \mathcal{D} : x_i \in B_i$.
Din faptul că \mathcal{D} este dirijată la dreapta, rezultă că există $B' \in \mathcal{D} : \forall i, B_i \subseteq B'$. Astfel, $\forall i, x_i \in B'$, de unde $\omega(x_1, \dots, x_{\tau(\omega)}) \in B' \subseteq E$.

Deci, $E \in S(A, \Omega)$, adică $S(A, \Omega)$ este un sistem de închidere algebric pe A . ■

Observația 33 $S(A, \Omega)$ nu este sublatice a lui $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, pentru că $\text{sup}(S_1, S_2) \neq S_1 \cup S_2$.

Observația 34 Fie \mathcal{C} un sistem de închidere algebric pe A . Atunci \mathcal{C} este sublatice a lui $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ dacă și numai dacă \mathcal{C} este sistem de închidere topologic.

Fie $J_\Omega : \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ operatorul de închidere corespunzător lui $S(A, \Omega)$. Atunci

$$\forall X \subseteq A, J_\Omega(X) = \cap \{B \in S(A, \Omega) \mid X \subseteq B\}.$$

este subalgebra generată de $X \subseteq A$.

X se numește *mulțime de generatori*.

$J_\Omega(\emptyset)$ este subalgebra minimală a lui (A, Ω) .

$J_\Omega(\emptyset) = \emptyset$ dacă și numai dacă Ω nu are operații nulare.

10.4 Latticea congruențelor unei algebre universale

Fie (A, Ω) o algebră universală, iar $C(A, \Omega)$ mulțimea congruențelor sale.

Teorema 53 $C(A, \Omega)$ este un sistem de închidere algebric pe A^2 .

Demonstrație. Fie $\mathcal{C} \subseteq C(A, \Omega)$, $q = \bigcap_{\rho \in \mathcal{C}} \rho$. Deci q este o echivalență. Arătăm că q este o congruență, adică verificăm că

$$q \underset{\text{subalg.}}{\leq} (A^2, \Omega).$$

Din $\rho \leq (A^2, \Omega)$ și $S(A^2, \Omega)$ sistem de închidere pe A^2 , rezultă

$$\bigcap_{\rho \in \mathcal{C}} \rho = q \leq (A^2, \Omega),$$

deci q este o congruență.

Verificăm algebricitatea sistemului de închidere, adică arătăm că $\forall \mathcal{D} \subseteq C(A, \Omega)$, unde \mathcal{D} este nevidă și dirijată la dreapta, $\delta = \bigcup_{\rho \in \mathcal{D}} \rho \in C(A, \Omega)$.

Avem echivalența $\rho \in \mathcal{D} \subseteq C(A, \Omega) \iff \rho \leq (A^2, \Omega)$ și cum $S(A^2, \Omega)$ este sistem de închidere algebric pe A^2 , rezultă $\delta = \bigcup_{\rho \in \mathcal{D}} \rho \leq (A^2, \Omega)$.

Mai rămâne de arătat că δ este o echivalență. Din $\delta = \bigcup_{\rho \in \mathcal{D}} \rho$, ρ echivalență, rezultă că δ este reflexivă și simetrică.

Să verificăm acum că δ este tranzitivă.

Fie $x\delta y$, $y\delta z$ deci $\exists \rho_1, \rho_2 \in \mathcal{D} : x\rho_1 y$, $y\rho_2 z$; pe de altă parte, $\exists \rho : \rho_1 \subseteq \rho$, $\rho_2 \subseteq \rho$. Obținem $x\rho z$, de unde $x\delta z$. Deci, $\delta \in C(A, \Omega)$, adică $C(A, \Omega)$ este un sistem de închidere algebric pe A^2 . ■

Corolarul 1 $C(A, \Omega)$ este o latice completă, iar cel mai mare element al său este A^2 . Cel mai mic element este $\Delta_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$.

Exerciții

1. Mulțimea \mathcal{F} a filtrelor unei latici L este un sistem de închidere algebric pe L .

Soluție.

1. Fie $F_i \in \mathcal{F}$, $\forall i \in I$ și $F = \bigcap_{i \in I} F_i$.

Arătăm că $F \in \mathcal{F}$.

Reamintim definiția unui filtru:

$$\begin{cases} x, y \in F \implies x \wedge y \in F \\ x \in F, y \geq x, y \in L \implies y \in F \end{cases} \iff [x, y \in F \iff x \wedge y \in F].$$

Avem șirul de echivalențe :

$$\begin{aligned} x, y \in F &\iff \forall i \in I, x, y \in F_i \text{ filtru} \iff \forall i \in I, \\ x \wedge y \in F_i &\iff x \wedge y \in F = \bigcap_{i \in I} F_i. \end{aligned}$$

Deci, F este un filtru.

Rezultă că \mathcal{F} este un sistem de închidere pe L .

2. Algebricitatea: Fie $(F_i)_{i \in I}$ o familie de filtre dirijată la dreapta și $\overline{F} = \bigcup_{i \in I} F_i$. Arătăm că $\overline{F} \in \mathcal{F}$.

Fie $x, y \in \overline{F}$. Rezultă că $\exists i_1, i_2$ astfel încât $x \in F_{i_1}$, $y \in F_{i_2}$ și cum familia este dirijată la dreapta, rezultă $\exists F_j$ astfel încât $F_{i_1} \subset F_j$, $F_{i_2} \subset F_j$.

Deci $x, y \in F_j$ de unde $x \wedge y \in F_j \subset \overline{F}$.

Fie acum $x \in F_i$, $y \geq x$ de unde $y \in F_i$. Deci, $\overline{F} \in \mathcal{F}$. ■

2. Fie L o latice distributivă și (\mathcal{F}, \subseteq) laticea filtrelor sale. Atunci $\forall F_1, F_2 \in \mathcal{F}$,

$$F_1 \vee F_2 = \{x \wedge y \mid x \in F_1, y \in F_2\}.$$

Soluție.

1. Notăm $A = \{x \wedge y \mid x \in F_1, y \in F_2\}$.

Arătăm că $A \in \mathcal{F}$.

- $x_1 \wedge y_1, x_2 \wedge y_2 \in A$ implică

$$(x_1 \wedge y_1) \wedge (x_2 \wedge y_2) = (x_1 \wedge x_2) \wedge (y_1 \wedge y_2) \in A.$$

- $x \wedge y \in A, z \geq x \wedge y$ implică $z \in A$. Într-adevăr, din $z \geq x \wedge y$ rezultă

$$z = z \vee (x \wedge y) \stackrel{\text{distr.}}{=} (z \vee x) \wedge (z \vee y) \in A.$$

2. A majorantă în \mathcal{F} pentru F_1 și F_2 . Într-adevăr,

dacă $x \in F_1, y \in F_2$ atunci $x \wedge y \in A, x \wedge y \leq x$ de unde $x \in A$ adică $F_1 \subseteq A$. Analog, $F_2 \subseteq A$.

3. Fie $F \in \mathcal{F}, F_1 \subseteq F, F_2 \subseteq F$. Arătăm că $A \subseteq F$. Fie $x \in F_1, y \in F_2$. Avem $x \wedge y \in A$, de unde $x \wedge y \in F$ deci $A \subseteq F$.

Așadar, $A = F_1 \vee F_2$. ■

Observația 35 $F_1 \wedge F_2 = F_1 \cap F_2$.

Capitolul 11

Algebre libere

11.1 Algebra Ω -cuvintelor

Fie Ω o mulțime de operații, iar X o altă mulțime. În cele ce urmează, considerăm $X \cap \Omega = \emptyset$.

Definiția 69 Un Ω -șir în X este un **șir finit** (adică o n -uplă pentru $n \geq 1$) de elemente ale reuniunii (disjuncte) $\Omega \cup X$.

Notăm cu $W(\Omega, X)$ mulțimea tuturor Ω -șirurilor în X .

Definim pe $W(\Omega, X)$ o structură de Ω -algebră, prin **juxtapunere**.

Fie $\omega \in \Omega(n)$ (adică ω are tipul n), $a_i \in W(\Omega, X)$, $i = \overline{1, n}$, $a_i = (a_{i1}, \dots, a_{ik_i})$, $a_{ij} \in \Omega \cup X$, $j = \overline{1, k_i}$ și notăm

$$\omega(a_1, \dots, a_n) = (\omega, a_{11}, \dots, a_{1k_1}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nk_n}).$$

Se identifică Ω -șirurile care au un singur element cu acel element din $\Omega \cup X$, deci $\Omega \cup X \subseteq W(\Omega, X)$.

Definiția 70 $W(\Omega, X)$ se numește **algebra Ω -cuvintelor** pe X , notată și $W_\Omega(X)$.

Elementele acestei algebre se numesc Ω -**cuvinte** în X .

X este **alfabetul** algebrei.

Teorema 54 Fie X, Y mulțimi. Atunci $W_\Omega(X) \simeq W_\Omega(Y)$ dacă și numai dacă X este echipotent cu Y .

Demonstrație. ” \Leftarrow ” : Fie $\theta : X \rightarrow Y$ o bijecție.

În fiecare Ω -șir înlocuim $x \in X$ cu $\theta(x) \in Y$.

Obținem o bijecție f între $W(\Omega, X)$ și $W(\Omega, Y)$.

Să verificăm condițiile de morfism:

$$\begin{aligned} f(\omega(x_1, \dots, x_n)) &\stackrel{\text{def. } f}{=} \omega(\theta(x_1), \dots, \theta(x_n)) = \\ &= \omega(f(x_1), \dots, f(x_n)) \end{aligned}$$

Deci f este un izomorfism.

” \Rightarrow ” : Fie acum $W_\Omega(X) \simeq W_\Omega(Y)$.

Pe orice algebră (A, Ω) putem defini congruența:

$$aqb \iff \begin{cases} a = b \text{ sau} \\ a = \omega(x), \quad x \in A^n, \omega \in \Omega(n) \\ b = \bar{\omega}(y), \quad y \in A^m, \bar{\omega} \in \Omega(m). \end{cases}$$

Notăm $A^\circ = A/q$, deci $W^\circ = W_\Omega(X)/q$.

W° constă în:

$\left\{ \begin{array}{l} \text{-clase cu câte un element din } X; \\ \text{-într-o altă clasă, ce conține toate celelalte elemente} \end{array} \right.$

Rezultă că $|W^\circ| = |X| + 1$.

Cum $W_\Omega(X) \simeq W_\Omega(Y)$ rezultă $|W_\Omega(X)^\circ| = |W_\Omega(Y)^\circ|$ de unde $|X| + 1 = |Y| + 1$, deci $|X| = |Y|$. ■

Observația 36 *Izomorfismul $f : W_\Omega(X) \rightarrow W_\Omega(Y)$ este unic determinat de θ .*

Teorema 55 *Fie (A, Ω) o algebră universală și X o mulțime de generatori pentru (A, Ω) . Atunci, pentru orice morfism de algebre universale $\theta : A \rightarrow B$, θ este complet determinat de restricția θ/X .*

Demonstrație.

Presupunem că $\exists \theta_1, \theta_2 : A \rightarrow B$, $\theta_1 \neq \theta_2$, dar $\theta_1/X = \theta_2/X$.

Fie $A' = \{x \in A \mid \theta_1(x) = \theta_2(x)\}$.

Arătăm că $A' = A$. Mai întâi, verificăm că $A' \leq A$:

Fie $(x_1, \dots, x_n) \in (A')^n$. Rezultă că $\theta_1(x_i) = \theta_2(x_i)$, $\forall i = \overline{1, n}$ și cum θ_1, θ_2 sunt morfisme, obținem

$$\theta_1(\omega(x_1, \dots, x_n)) = \omega(\theta_1(x_1), \dots, \theta_1(x_n)) = \omega(\theta_2(x_1), \dots, \theta_2(x_n)) = \theta_2(\omega(x_1, \dots, x_n)).$$

Deci $\omega(x_1, \dots, x_n) \in A'$ de unde $A' \leq A$.

Dar $X \subseteq A' \leq A = \langle X \rangle$, așadar $A' = A$, contradicție cu $\theta_1 \neq \theta_2$. ■

Teorema 56 *Orice algebră universală (A, Ω) poate fi privită ca imaginea homomorfică a unei algebre de Ω -cuvinte $W_\Omega(X)$, unde X e o mulțime convenabil aleasă.*

Demonstrație.

Fie X o mulțime de generatori pentru A . Extindem $i : X \rightarrow A$ la $\theta : W_\Omega(X) \rightarrow A$. Avem $X \subset \text{Im } \theta \leq A = \langle X \rangle$ de unde $\text{Im } \theta = A$.

X este bază în $W_\Omega(X)$ și X este totodată o mulțime de generatori în A .

■

Algebra universală $W_\Omega(X)$ se mai numește *algebră universală liberă* de baza X .

11.2 Functorul universal

Mai întâi, considerăm diagrama următoare:

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & U(X) \\ \downarrow \theta & & \swarrow \exists! \bar{\theta} \\ A & & \end{array}$$

ce satisface *proprietatea de universalitate*:

$$\forall A \in \Omega, \forall \theta : X \rightarrow A, \exists! \bar{\theta} : W_\Omega(X) \rightarrow A \text{ astfel încât } \bar{\theta}i = \theta.$$

Fie $U : \text{Set} \rightarrow \Omega$, definit astfel $U(X) = W_\Omega(X)$ și considerăm diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_X} & W_\Omega(X) \\ \alpha \downarrow & \searrow i_Y \alpha & \downarrow U(\alpha) \\ Y & \xrightarrow{i_Y} & W_\Omega(Y) \\ \beta \downarrow & & \downarrow U(\beta) \\ Z & \xrightarrow{i_Z} & W_\Omega(Z) \end{array}$$

Verificăm că U este functor. Avem

$$\begin{cases} U(\alpha) i_X = i_Y \alpha \\ U(\beta) i_Y = i_Z \beta \end{cases} \text{ deci } U(\beta) i_Y \alpha = i_Z \beta \alpha, \text{ dar } i_Y \alpha = U(\alpha) i_X.$$

Rezultă că $U(\beta) U(\alpha) i_X = i_Z \beta \alpha$.

Pe de altă parte $U(\beta\alpha) i_X = i_Z \beta\alpha$.

Din unicitatea lui $\bar{\theta}$ rezultă $U(\beta)U(\alpha) = U(\beta\alpha)$.

Pentru $\alpha = 1_X$ avem $U(1_X)1_X = 1_X$.

Folosind unicitatea lui $\bar{\theta}$ obținem $U(1_X) = 1_{U(X)} = 1_{W_\Omega(X)}$.

Deci, U este functor.

Teorema 57 *Fie X o mulțime și q o echivalență pe X . Dacă \bar{q} este congruența pe $U(X) = W_\Omega(X)$ generată de q , atunci $\bar{q} \cap X^2 = q$ și $W_\Omega(X)/\bar{q} \simeq W_\Omega(X/q)$.*

Demonstrație.

Considerăm diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & U(X) \\ \pi \downarrow & & \downarrow U(\pi) \\ X/q & \longrightarrow & U(X/q) \end{array}$$

Să determinăm $\ker U(\pi) = \{(w, w') \mid U(\pi)(w) = U(\pi)(w')\}$.

Fie $(x, x') \in q$, deci $\pi(x) = \pi(x')$.

Avem $U(\pi)(x) = \pi(x) = \pi(x') = U(\pi)(x')$, de unde $(x, x') \in \ker U(\pi)$. Așadar, $q \subseteq \ker U(\pi)$.

Cum \bar{q} este congruența generată de q , rezultă $\bar{q} \subseteq \ker U(\pi)$.

Verificăm că

$$\ker U(\pi) \cap X^2 = q.$$

Fie $(x, y) \in \ker U(\pi) \cap X^2$. Avem $U(\pi)(x) = U(\pi)(y)$, dar cum $(x, y) \in X^2$ rezultă $\pi(x) = \pi(y)$ deci $(x, y) \in q$.

Prin urmare, $\ker U(\pi) \cap X^2 \subseteq q$.

Dar, $q \subseteq \ker U(\pi)$, $q \subseteq X^2$ de unde $q \subseteq \ker U(\pi) \cap X^2$.

Rezultă deci egalitatea $\ker U(\pi) \cap X^2 = q$.

$$\text{Fie } \begin{cases} \phi : U(X)/\bar{q} \rightarrow U(X/q) \\ \overline{\omega(x_1, \dots, x_n)} \rightsquigarrow \omega(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) \end{cases} .$$

ϕ e bine definit, pentru că $\bar{q} \subseteq \ker U(\pi)$.

Pe de altă parte,

$$\begin{cases} X/q \xrightarrow{\psi} U(X)/\bar{q} \\ \hat{x} \rightsquigarrow \bar{x} \end{cases}$$

se prelungește unic la

$$\begin{cases} U(X/q) \xrightarrow{\psi_1} U(X)/\bar{q} \\ \omega(\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n) \rightsquigarrow \overline{\omega(x_1, \dots, x_n)} \end{cases} .$$

ψ_1 este inversa lui ϕ , deci ϕ este izomorfism.

În plus, $U(X/q) \simeq U(X)/\ker U(\pi)$, conform primei teoreme de izomorfism, deci $\bar{q} = \ker U(\pi)$. Prin urmare, are loc egalitatea $\bar{q} \cap X^2 = q$. ■

Observația 37 Dacă A este o algebră liberă pe $X = \{a, b, c\}$ și dacă $(b, c) \in \bar{q}$, atunci obținem o algebră liberă A/\bar{q} pe $\{\hat{a}, \hat{b}\}$.

Capitolul 12

Note istorice

12.1 Despre Teoria Categoriilor si fondatorii ei

Teoria Categoriilor reprezintă atât un limbaj matematic, cât și un instrument de lucru pentru matematica modernă, dar și în informatica teoretică, în fizica matematică etc.

Francis William Lawvere, profesor emerit de matematică la Universitatea Statală din Buffalo, considera că ”teoria categoriilor a influențat decisiv dezvoltarea a practic tuturor sectoarelor matematicii în cei 60 de ani de existență”. Studiul categoriilor reprezintă o modalitate de a captura proprietăți ce au loc în diferite clase de structuri matematice, legate între ele de morfismele corespunzătoare.

Astfel, teoria categoriilor formalizează structurile matematice și legăturile dintre acestea în termeni de colecții de obiecte și de săgeți (numite morfisme). De remarcat că obiectele nu sunt nea-

parat mulțimi, iar morfismele dintr-o categorie nu sunt neaparat funcții. Într-o categorie au loc două proprietăți de bază: comutarea asociativă a morfismelor și existența unui morfism unitate pentru fiecare obiect.

Un studiu sistematic al teoriei categoriilor permite obținerea de rezultate generale în diverse tipuri de structuri matematice.

Studiind morfismele dintr-o categorie, putem afla mai multe informații despre structura obiectelor.

Functorii și transformările naturale sunt conceptele-cheie în teoria categoriilor. Prin studierea categoriilor și functorilor, nu se studiază doar o clasă de structuri matematice și morfismele dintre ele, ci și relațiile dintre diferite clase de structuri matematice. Un functor asociază fiecărui obiect dintr-o categorie un obiect din altă categorie, și fiecărui morfism din prima categorie un morfism din a doua categorie.

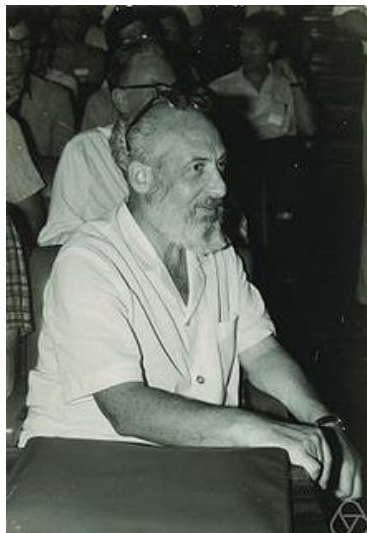
Ca exemplu, utilizând functorii, întrebări dificile topologice pot fi traduse în întrebări algebrice, care sunt adesea mai ușor de rezolvat. Construcții de bază, cum ar fi grupul fundamental al unui spațiu topologic, pot fi exprimate prin intermediul functorilor.

Transformările naturale sau morfismele functoriale reprezintă legături între functori, atunci când are loc așa numita proprietate de naturalitate, adică comutativitatea unei anumite diagrame. Multe construcții importante din matematică pot fi studiate în acest context.

12.1.1 Samuel Eilenberg și Saunders Mac Lane

Samuel Eilenberg și Saunders Mac Lane sunt considerați fondatorii teoriei categoriilor.

Samuel Eilenberg



Samuel Eilenberg (Varșovia, 30 septembrie 1913 – New York, 30 ianuarie 1998) a fost un matematician evreu de origine poloneză, dar care și-a desfășurat cea mai mare parte a carierei sale de profesor la Universitatea Columbia din Statele Unite. A obținut Premiul Wolf pentru matematică în 1986.

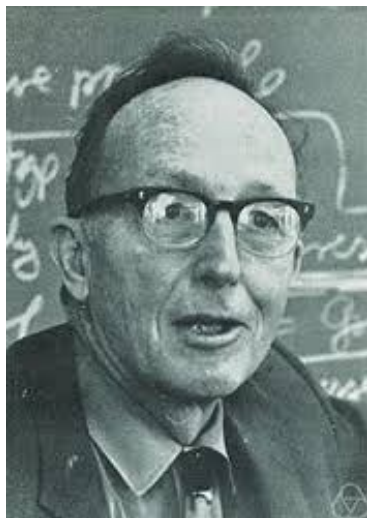
Eilenberg a obținut doctoratul la Universitatea din Varșovia în 1936 sub coordonarea lui Karol Borsuk.

Domeniul său principal de studiu era topologia algebrică. Împreună cu Norman Steenrod a axiomatizat omologia algebrică. A scris cartea *Homological Algebra* în 1956 împreună cu Henri Cartan; această carte a devenit o carte de referință în domeniu. În colaborare cu Saunders Mac Lane a contribuit la dezvoltarea algebrei omologice, punând astfel bazele teoriei categoriilor.

Eilenberg a participat la întâlnirile grupului Nicolas Bourbaki și a scris de asemenea o carte importantă în teoria automatelor.

Ultima parte a vieții sale a dedicat-o studiului categoriilor. Eilenberg a fost și un renumit colecționar de artă asiatică, de proveniență din India, Nepal, Tailanda, Cambogia, Sri Lanka și Asia centrală. Mai mult de 400 exponate pe care Eilenberg le-a donat Muzeului Metropolitan de Artă din New York, au fost expuse în perioada 1991-1992, sub numele *The Lotus Transcendent: Indian and Southeast Asian Art From the Samuel Eilenberg Collection*.

Saunders Mac Lane



Saunders Mac Lane, cu numele inițial Leslie Saunders MacLane (Taftville, 4 august 1909 – San Francisco, 14 aprilie 2005), a fost unul dintre cei mai renumiți matematicieni americani ai secolului al XX-lea, cunoscut în special pentru contribuțiile sale în algebra abstractă (în particular, în algebra omologică și în teoria categoriilor).

A scris texte matematice accesibile studentilor: *A Survey of*

Modern Algebra (împreună cu Garrett Birkhoff), publicat în 1941, Categories for the Working Mathematician publicat în 1971, considerată și astăzi o carte de referință în teoria categoriilor.

În 1930, Mac Lane a obținut titlul Bachelor of Arts (BA) la Universitatea din Yale și în 1931 titlul Master of Arts (MA) la Universitatea din Chicago. A frecventat apoi cursurile de doctorat cu Paul Bernays, Emmy Noether și Hermann Weyl la Universitatea din Göttingen, Germania, universitate considerată, la acele timpuri, centrul cercetării matematice mondiale. A susținut teza Abgekürzte Beweise im Logikkalkül ("Demonstrații abreviate în Calculul Logic"), în 19 iulie 1933 și a revenit în Statele Unite, datorită politicii naziste din Germania acelor ani. Preda la Universitățile Harvard, Cornell și Chicago. Din 1947 a ocupat o catedră de profesor de matematică la Universitatea din Chicago, unde își desfășură restul carierei sale academice. În 1949 a fost ales ca membru în Academia Națională de Științe și apoi președinte al Asociației Matematice din America; în perioada 1974-1980 a fost membru al United States National Science Board, iar în 1982 a devenit Profesor Emerit. În 1989 a primit Medalia Națională pentru Științe, cel mai înalt titlu pentru activitatea științifică în Statele Unite. A scris mai mult de 100 de articole științifice și 6 cărți.

A fost distins cu diverse premii matematice: Premiul Chauvenet al Asociației Matematice din America (1941); Colloquium Lecturer al Societății Matematice Americane (1963); Titlul "Mac Mason" pentru activitatea didactică (1963); Premiul Steele al Societății Matematice Americane (1986); Medalia Națională de Științe (1989); Premiul Guggenheim. A fost membru onorific al Societății Regale din Edinburg.

A coordonat peste 50 de teze de doctorat.

Opera lui Mac Lane îmbrățișează diverse ramuri ale matematicii: logică matematică, teoria corpurilor comutative, extinderi de grupuri, teoria omologiei, teoria categoriilor.

Astfel, împreună cu Samuel Eilenberg a pus bazele unei noi abordări în matematică, introducând conceptele de categorie, functor și transformare naturală.

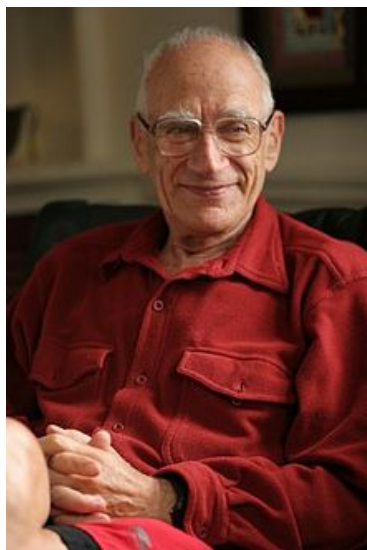
12.2 Alte figuri matematice marcante pentru Teoria Categoriilor

Prezenăm în continuare pe scurt bibliografiile altor trei matematicieni care au avut contribuții majore în teoria categoriilor și aplicații ale sale în topologie algebrică, algebră omologică: Daniel Kan, Nobuo Yoneda și Alexander Grothendieck.

12.2.1 Daniel Kan

Daniel Marinus Kan (August 4, 1927 - August 4, 2013) a fost un matematician olandez care a lucrat în special în teoria omotopiei. A avut contribuții majore în acest domeniu în ultimele șase decenii, fiind autor sau coautor a câtorva zeci de lucrări și monografii.

A fost un profesor emerit la MIT, unde a predat încă din anii 1960. A obținut doctoratul la Universitatea ebraică în 1955, sub conducerea lui Samuel Eilenberg. Printre elevii săi se numără Aldridge K. Bousfield, William Dwyer, Stewart Priddy și Jeffrey H. Smith.

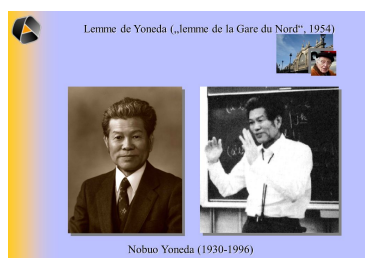


Lui i se datorează conceptul de functori adjuncți, apărut într-o lucrare din 1958, cât și așa-numitele extinderi Kan.

A avut, de asemenea, contribuții importante în topologie.

Unele dintre preocupările sale recente se referă la categorii de modele și alte categorii omotopice. A avut colaborări științifice cu Bousfield și Dwyer.

12.2.2 Nobuo Yoneda



Nobuo Yoneda (28 Martie 1930- 22 Aprilie 1996) a fost un ma-

tematician și informatician japonez, cunoscut în Teoria Categoriilor pentru Lema lui Yoneda.

Yoneda a studiat matematica la Universitatea din Tokyo. În ultimul an de licență, a urmat seminarul profesorului Shokiti Iyanaga, demonstrând interes pentru algebra topologică. La scurt timp, prof. Samuel Eilenberg a sosit în Japonia, iar Yoneda i-a fost ghid și translator. Ulterior, a obținut o bursă Fulbright și a fost la Princeton, pentru a studia cu Eilenberg.

Eilenberg s-a mutat în Franța, iar Yoneda l-a urmat după un an. În acea perioadă, Saunders Mac Lane frecventa specialiști din teoria categoriilor din Franța și s-a întâlnit și cu Yoneda. Saunders Mac Lane i-a luat un interviu lui Yoneda la o cafea din Gare du Nord din Paris, iar mai târziu acele discuții și idei s-au concretizat în ceea ce azi numim Lema lui Yoneda. Lema lui Yoneda este un instrument important care stă la baza mai multor dezvoltări moderne în geometria algebrică și teoria reprezentării.

Șederea lui Yoneda în America și Europa a mai continuat doi ani, iar la întoarcerea în Japonia, Iyanagai i-a sugerat să studieze calculatoarele. În informatică este cunoscut ca membru al comitetului Algol 68.

Până în 1976, Yoneda a fost profesor la Departamentul de Matematică la Gakushu University în Tokyo și a ocupat în 1977 un post de profesor la Departamentul de Informatică al Universității din Tokyo. A ieșit la pensie în 1990, la vârsta de 60 de ani și s-a mutat la Universitatea din Tokyo Denki, unde a lucrat ca profesor până la sfârșitul vieții.

Încă din ianuarie 1996 a fost răpus la pat de pancreatită și a decedat pe 21 aprilie de insuficiență cardiacă.

12.2.3 Alexander Grothendieck



Alexander Grothendieck (28 martie 1928, Berlin - 13 noiembrie 2014, Saint-Lizier, Ariège) a fost un matematician francez de origine germană.

Biografie

S-a născut într-o familie de etnie ebraică cu origini ucrainene și care, pentru a scăpa de prigoana nazistă, s-a mutat la Paris. După încheierea celui de-al Doilea Război Mondial, a studiat matematica la Universitatea din Montpellier. A activat în Franța ca profesor la Institutul de Înalte Studii de la Gif-sur-Yvette.

În mai 1968 se retrage din viața academică și se implică activ alături de matematicienii care sufereau din pricina războiului din Vietnam. După 1991 se retrage din viața publică. Bătrânețea și-a petrecut-o în Ariège, unde a pregătit cărți pentru publicare.

Activitate științifică

A fondat o școală proprie de algebră geometrică, începând cu anul 1960 și a contribuit la clarificarea unor noțiuni din geometria

algebrică. A avut contribuții în algebra omologică, utilizând teoria categoriilor și a functorilor. A obținut rezultate interesante în teoria grupurilor. A introdus o clasă mai restrânsă de spații vectoriale topologice și anume așa-numitele spații nucleare. A demonstrat că topologia din spațiile nucleare poate fi definită cu ajutorul unei mulțimi numărabile de seminorme hilbertiene.

În anul 1966 a fost decorat cu cea mai mare distincție a lumii matematice: Medalia Fields.

12.3 Algebră universală - Istoric

În *Tratat despre Algebră universală*, scrisă de Alfred North Whitehead și publicată în 1898, termenul de algebră universală a avut, în esență, același înțeles pe care îl are astăzi. Atât William Rowan Hamilton cât și Augustus De Morgan sunt creditați de Whitehead ca inițiatori ai domeniului, dar și James Joseph Sylvester a folosit acest termen.

De-a lungul timpului, structuri ca algebre Lie și quaternioni hiperbolici au atras atenția asupra necesității de a extinde structurile algebrice dincolo de clasa celor asociativ multiplicative.

Alexander Macfarlane a scris despre cartea lui Whitehead: "Ideea principală a lucrării nu este o unificare a mai multor metode, nici generalizarea algebrei obișnuite, astfel încât să le includă, ci mai degrabă studiul comparativ al mai multor structuri." La momentul respectiv, termenul de algebră Boole din logică nu intra în acord cu algebrele numerice obișnuite, astfel încât termenul de "universal" a servit pentru a calma disensiunile apărute.

Opera lui Whitehead a încercat să unifice quaternionii (definiți

de Hamilton), algebrele Boole din logică și alte structuri. Whitehead a scris în cartea sa: ”Astfel de algebre au o valoare intrinsecă pentru un studiu detaliat separat, de asemenea, ele sunt demne de un studiu comparativ, de dragul teoriei generale a raționamentului simbolic, și a simbolismul algebric. În special, un studiu comparativ presupune în mod necesar în precedent un studiu separat.”

Cu toate acestea, Whitehead nu a avut niciun rezultat cu caracter general. Studiul pe această temă a fost minim până la începutul anilor 1930, când Garrett Birkhoff și Oystein Ore au început să publice în domeniul algebrelor universale. Evoluțiile în matematică și teoria categoriilor din anii 1940 și 1950 au promovat acest domeniu, în special de Abraham Robinson, Alfred Tarski, Andrzej Mostowski, și elevii lor (Brainerd 1967).

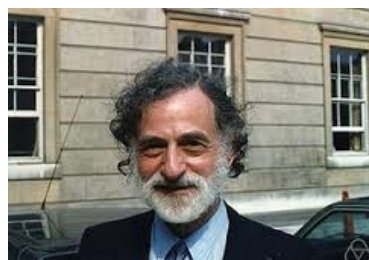
În perioada 1935 - 1950, cele mai multe lucrări în domeniu au fost scrise de-a lungul temelor propuse de lucrările lui Birkhoff, care se ocupa cu algebre libere, congruență și subalgebra Grile, și teoreme de homomorfism. Rezultatele publicate de Anatoli Maltsev în anii 1940 au trecut neobservate din cauza războiului. Prelegerea lui Tarski în 1950 la Congresul Internațional al Matematicienilor din Cambridge a inaugurat o nouă perioadă în care au fost elaborate aspectele teoretice - modelul, în principal, de Tarski însuși, precum și de CC Chang, Leon Henkin, Bjarni Jónsson, Roger Lyndon, și alții.

La sfârșitul anilor 1950, Edward Marczewski a subliniat importanța algebrelor libere, ceea ce duce la publicarea a peste 50 de lucrări pe teoria algebrică a algebrelor libere, scrise de Marczewski singur sau împreună cu Jan Mycielski, Władysław Narkiewicz, Witold Nitka, J. Płonka, S. Świerczkowski, K. Urbanik, și alții.

Vom prezenta acum câteva note bibliografice despre matematicienii care au adus contribuții substanțiale în acest domeniu.

12.4 Despre Paul Cohn și George Grätzer

12.4.1 Paul Cohn



Paul Moritz Cohn, s-a născut la 1 August 1924 în Hamburg, Germania și a murit pe data de 20 aprilie 2006, la Londra. A fost un matematician evreu englez de origine germană, renumit algebrist și autor a numeroase lucrări de referință în algebră, inele necomutative, algebră universală, teoria laticilor.

A urmat școala din Alsterdorfer Straße, apoi, datorită atitudinii in juste a unui profesor nazist, s-a mutat la școala din Meerweinstraße, unde preda mama sa. Regimul nazist ajuns la putere, l-a făcut să schimbe diverse școli în perioada 1933-1938. Mama sa a fost destituită, iar tatăl său a fost arestat în noiembrie 1938 și trimis într-un câmp de concentrare din Sachsenhausen, pe o perioadă de 4 luni, de unde apoi a avut ordin de emigrare. În mai 1939, Cohn ajunge în Marea Britanie și nu și-a mai revăzut niciodată părinții, deși a corespondat cu aceștia până în 1941. La sfârșitul celui de al

doilea război mondial, a aflat că în decembrie 1941 părinții săi au fost deportați la Riga.

Paul a dorit să devină inginer și a lucrat într-o uzină timp de patru ani și jumătate, apoi a obținut prin concurs o bursă la Cambridge, și a fost admis la Trinity College.

S-a laureat în 1948 și a obținut doctoratul în matematică în 1951 la Cambridge. A lucrat apoi și la Universitatea din Nancy și cea din Manchester, a fost profesor invitat la Yale (1961-1962) și la Berkeley (1962). Ulterior a predat și la Queen Mary College, la Chicago în 1964 și la Stony Brook în 1967.

A devenit în timp unul din algebriștii de renume internațional, predând în Statele Unite, la Paris, Delhi, în Canada, la Haifa. A obținut premiul Lester R. Ford din partea Mathematical Association of America în 1972 și premiul Senior Berwick (1974).

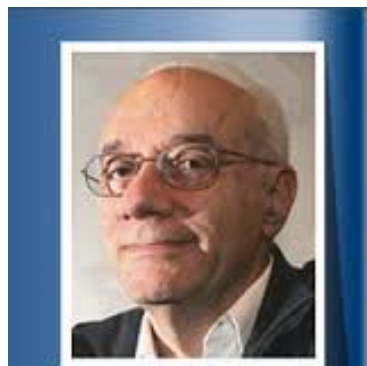
Cohn a scris peste 200 de lucrări matematice din teoria grupurilor, corpurilor, inelelor Lie, semigrupurilor, grupurilor abeliene, inelelor și în special algebra necomutativă. Tratatul său de algebră universală a apărut în 1965.

În timpul liber, îi placea să studieze etimologia și limbajul sub toate formele sale, traducând articole de matematică în spaniolă, italiană, rusă și chineză.

S-a căsătorit cu Deirdre Finkel în 1958 și au avut două fete.

12.4.2 George A. Grätzer

George A. Grätzer (maghiară: Grätzer György, născut pe 2 August 1936, Budapesta) este un matematician maghiar-canadian, specializat în teoria laticilor și algebra universală. Este cunoscut pentru cărțile sale despre LaTeX și pentru demonstrația teoremei Grätzer-



Schmidt.

George Grätzer a primit titlul de doctor la Universitatea Eötvös Loránd în 1960 sub supravegherea lui László Fuchs. În 1963 a publicat împreună cu E. Tamás Schmidt teorema care afirma că orice latice este izomorfă cu laticea congruențelor unei algebre universale.

În 1963 Grätzer s-a mutat din Ungaria în Statele Unite și a devenit profesor la Universitatea de Stat din Pennsylvania. În 1966 a devenit profesor la Universitatea din Manitoba, iar mai târziu un cetățean canadian.

În 1970, Grätzer a devenit redactor fondator și șef al revistei *Algebra Universalis*. Articolele sale matematice sunt citate pe scară largă și a scris mai multe cărți de referință, dintre care menționăm: *Universal Algebra* 1960, *Lattice Theory* 1971, *First Steps in LaTeX* 1999, *The Congruences of a Finite Lattice: A Proof-by-Picture Approach* 2005, *Math into LaTeX* 2000, *More Math into LaTeX* 2007.

Grätzer a primit mai multe premii și onoruri: Grünwald Memorial Prize (1967), Steacle Prize (1971), Membru al Societății Regale din Canada, Jeffery–Williams Prize (1978), Zubek Prize (1987), Membru extern al Academiei Magyar Tudományos (1997).

El este căsătorit și are doi copii (unul dintre ei este David Grätzer) și patru nepoți.

12.5 Despre Charles S. Pierce și Ernst Schröder

Investigând algebrele Booleene, Charles S. Pierce și Ernst Schröder au introdus conceptul de latică, la sfârșitul secolului 19. Independent, studiind idealele inelului întregilor, Richard Dedekind a ajuns la aceeași descoperire. Mai mult, Dedekind a ajuns la concluzia că laticăa acestora satisface o anumită lege, numită astăzi legea modulară (numită, de altfel, și legea Dedekind).

Teoria laticilor a fost utilizată în conexiune cu teoria grupurilor și a sistemelor algebrice, în general. În 1935 Ore a dat o demonstrație pur laticăală pentru teorema Krull-Schmidt, de unicitate a descompunerilor directe.

12.5.1 Charles S. Peirce

Charles Sanders Peirce (10 septembrie 1839 - 19 aprilie 1914) a fost filosof și logician american, considerat fondator al curentului filosofic pragmatism și, alături de William James, părintele semioticii moderne.

S-a născut în Cambridge, Massachusetts și a fost fiul lui Sarah Hunt Mills și Benjamin Peirce, profesor de astronomie și matematică la Universitatea Harvard. Charles Peirce a obținut diploma în chimie la Harvard în 1859 iar în timpul liber studia filosofia.



A fost un inovator în logică și matematică și a avut contribuții în studiul laticilor.

12.5.2 Ernst Schröder

Friedrich Wilhelm Karl Ernst Schröder (25 noiembrie 1841 în Mannheim, Baden, Germania - 16 iunie 1902 în Karlsruhe, Germania) a fost un matematician german, cunoscut mai ales pentru lucrările sale în logică alături de George Boole, Augustus De Morgan, Hugh MacColl, și mai ales de Charles Peirce.

Datorită lui, logica matematică s-a impus ca disciplină de sine stătătoare în secolul al XX-lea.

Schröder a studiat matematica la Heidelberg, Königsberg și Zürich, cu Otto Hesse, Gustav Kirchhoff și Franz Neumann.

S-a mutat apoi la Technische Hochschule Darmstadt, în 1874. Doi ani mai târziu, el a ocupat o catedră de matematică la Polytechnische Schule din Karlsruhe, unde a petrecut restul vieții. Nu a



fost niciodată căsătorit.

Schröder a avut contribuții importante în algebră și logică, fără să cunoască inițial lucrările logicienilor George Boole și Augustus De Morgan. A adăugat câteva concepte importante în logică, datorită lui Charles Sanders Peirce, inclusiv cuantificarea.

Totodată, Schröder a obținut rezultate în teoria mulțimilor, a mulțimilor ordonate și rezultate referitoare la numere ordinale. Împreună cu Georg Cantor a descoperit teorema lui Cantor–Bernstein–Schröder, deși demonstrația dată de Schröder în 1898 este greșită. Felix Bernstein (1878-1956) a corectat ulterior demonstrația, ca parte a tezei sale de doctorat.

Bibliografie

- [1] Leoreanu-Fotea, V., Radu, Gh., *Prolegomena of Categories and Homological algebra*, Matrix, România, 2007.
- [2] Graetzer, *Universal Algebra*, Springer-Verlag, 1989.
- [3] Mitchell, B., *Theory of Categories*, vol. 17, Academic Press, 1965
- [4] Moritz Cohn, P., *Universal algebra*, D.Reidel Pu. Company, 1981.
- [5] Purdea, I., *Culegere de probleme de algebra (Relatii, functii și algebre universale)*, Univ. Babes-Bolyai, 1996, Cluj Napoca.
- [6] Purdea, I., *Tratat de algebra moderna*, vol.II, Ed. Academiei, 1982.
- [7] Quattrocchi, P., Rinaldi, G., *Algebra*, Zanichelli, 1995.
- [8] Radu Gh., *Categorii și functori*, Ed. Univ. Al. I. Cuza Iași, 2006.
- [9] Radu, Gh., *Introducere in teoria categoriilor si functorilor*, Ed. Univ. "Al.I. Cuza", Iași, 1980.

- [10] Szász, G., *Theorie des treillis*, Dunod, Paris, 1971.
- [11] http://ro.wikipedia.org/wiki/Algebra_universala
- [12] <http://www.math.ubbcluj.ro/calu/sem-cat.pdf>
- [13] <http://www.math.ku.dk/~alexb/HomAlg/Category.pdf> Notes on categories and functors (PDF)